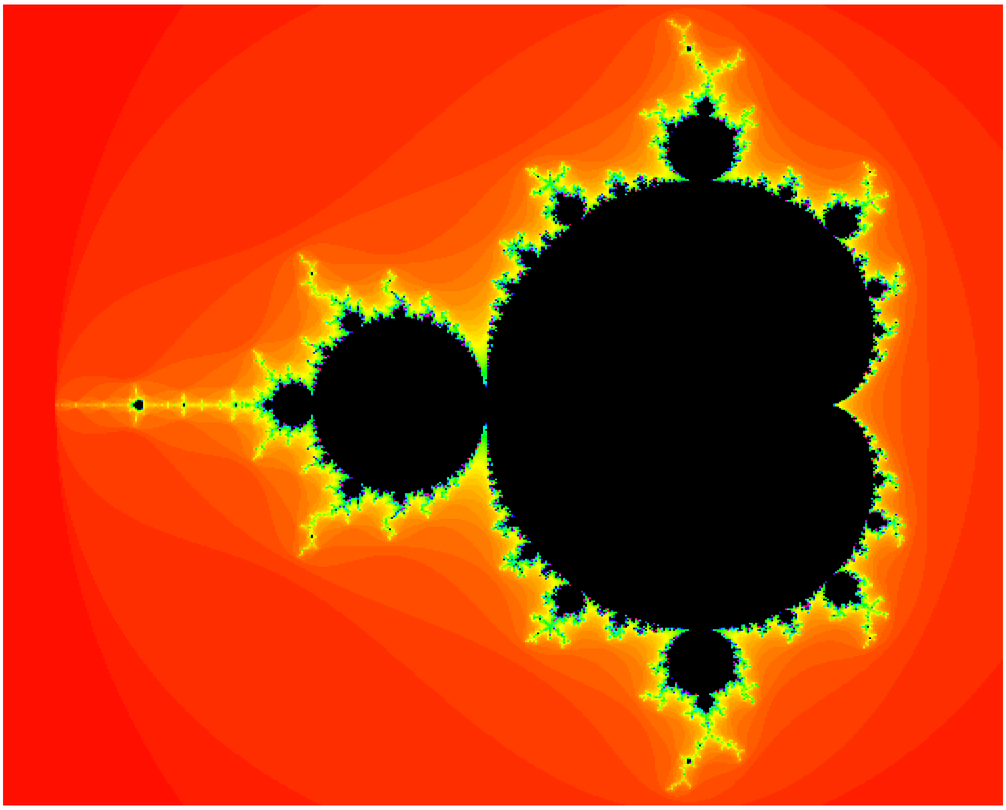
Wat? Nog meer getallen!

Complexe getallen en toepassingen

Juni 2007



Wiskunde D

Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven

De kerngroep Wiskunde D Eindhoven

Technische Universiteit Eindhoven
University of Technology

Wat? Nog meer getallen!

De kerngroep Wiskunde D Eindhoven in samenwerking met Hans Sterk
Vormgeving: Mike Boldy

Inhoudsopgave

Over deze module

Nog meer getalsystemen?

Je kent natuurlijk de gehele getallen, de rationale getallen (breuken) en de reële getallen. Uiteenlopende problemen in de exacte wetenschappen hebben geleid tot nog meer getalsystemen. Een beroemd getalsysteem, dat van de *complexe getallen*, staat centraal in deze module.

Hier zijn nog eens getallen en getalsystemen waarmee je al bekend bent:

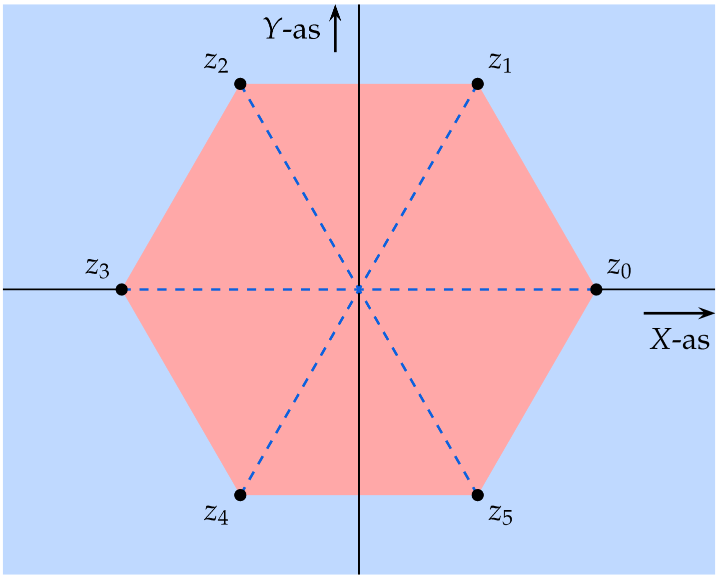
- de natuurlijke getallen ($\mathbb{N}$), zoals 1, 2 en 3,
- de gehele getallen ($\mathbb{Z}$), zoals -4, -2 en 130,
- de rationale getallen ($\mathbb{Q}$), zoals $3/4$ en $-5/6$,
- de reële getallen ($\mathbb{R}$), zoals $\sqrt{2}$, π en $-\sqrt[5]{7\pi}/3$.

De gehele getallen vormen een uitbreiding van de natuurlijke getallen, de rationale getallen een uitbreiding van de gehele getallen en de reële getallen een uitbreiding van de rationale getallen. Dit geven we wel als volgt aan, waarbij het symbool $\subseteq$ betekent 'bevat in' (deelverzameling van):

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

De complexe getallen, waar we het over gaan hebben, vormen een uitbreiding van de verzameling der reële getallen. Zoals de reële getallen worden voorgesteld als punten op de getallenrechte, zo kunnen de complexe getallen worden voorgesteld als punten in het platte vlak. Complexe getallen spelen niet zo'n zichtbare rol in het dagelijkse leven zoals de gehele getallen en de breuken en hebben, onder meer om die reden, een zekere mysterieuze status. Ze spelen des te meer een rol in wetenschapsgebieden zoals economie, biologie, natuurkunde, scheikunde, elektrotechniek en wiskunde. Via die wetenschapsgebieden bepalen ze natuurlijk mede de inrichting van onze maatschappij.

Enkele voorbeelden van gebieden waar complexe getallen een rol spelen:



Figuur 1 De zes complexe oplossingen van $z^6 = 1$ vormen de hoekpunten van een regelmatige zeshoek in het platte vlak.

- **Natuurkunde**: bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen die allerlei bewegingsverschijnselen beschrijven;
- **Economie**: bij het oplossen van differentievergelijkingen die systematische maar stapsgewijze veranderingen beschrijven;
- **Elektrotechniek**: bij het beschrijven van signalen, trillingen en golven;
- **Wiskunde**: bij het bestuderen van getallenpatronen.

Het doel van deze module is je vertrouwd te maken met deze getallen en je daarnaast nader te laten kennismaken met toepassingen. Voor je begint is het raadzaam even in Hoofdstuk 10 te kijken. Daarin staan wat zaken die je helpen om succesvol aan de slag te gaan.

In vogelvlucht volgen nu korte beschrijvingen van de diverse hoofdstukken.

Hoofdstuk 2: Wortels en letterrekenen

We gaan symbolisch rekenen met $\sqrt{2}$. We schrijven α in plaats van $\sqrt{2}$ en kijken hoe het is om met α te rekenen in een systeem waar verder alleen rationale getallen (breuken) voorkomen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van combinaties van rationale getallen en α. Het is bedoeld als vingeroefening voor het hoofdstuk waarin we met complexe getallen gaan rekenen. Het gaat in dit hoofdstuk uitdrukkelijk niet om de numerieke benadering van $\sqrt{2}$ en het is zelfs alleen maar van belang dat α voldoet aan $x^2 - 2 = 0$, niet eens of we de positieve of negatieve wortel bedoelen. Het enige dat telt is dat we in onze berekeningen α^2 kunnen vervangen door 2 (als we dat willen). Een voorproefje:

$$(1+\alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2 = 1 + 2\alpha + 2 = 3 + 2\alpha.$$

Hoofdstuk 3: Op het spoor van complexe getallen

Men kwam complexe getallen in de 15e eeuw op het spoor bij het zoeken naar een formule voor het oplossen van derdegraadsvergelijkingen. Dit hoofdstuk beschrijft hoe de gevonden formule op het oog tot hele andere resultaten leidde dan het gewone gezonde boerenfluitjesverstand. Bij het gebruik van de formule bleken wortels uit negatieve getallen als vanzelf op te treden, terwijl men natuurlijk niet wist wat men daar mee aan moest. Problemen van deze soort hebben over een tijdspanne van vele jaren geleid tot de ontwikkeling van het begrip complex getal.

Hoofdstuk 4: Rekenen met complexe getallen

Het is tijd om spijkers met koppen te slaan: wat jaren van ontwikkeling heeft gekost, heeft uiteindelijk geleid tot een degelijke definitie van het begrip complex getal. Zo'n definitie geven we en we laten zien hoe je met complexe getallen kunt rekenen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Ze verdienen dus echt de naam 'getallen'. Met deze nieuwe getallen is het oplossen van de vergelijking

$$z^2 = -1$$

geen probleem meer. Deze vergelijking heeft twee complexe oplossingen die genoteerd worden als i en $-i$.

Ongetwijfeld zal je in dit hoofdstuk de analogie met het symbolisch rekenen met $\sqrt{2}$ gaan opvallen, al is er wel een verschil: we zijn nu echt buiten de verzameling van de reëele getallen getreden.

Hoofdstuk 5: Het complexe vlak

Je blijkt je complexe getallen meetkundig te kunnen voorstellen als punten in het vlak. In dit hoofdstuk laten we dat zien en geven we aan in welke opzichten deze meetkundige kant ons begrip van complexe getallen vergroot.

Na dit hoofdstuk beschik je over het bijzondere inzicht dat complexe getallen gezien kunnen worden als punten uit het platte vlak die we niet alleen kunnen optellen en aftrekken, maar ook kunnen vermenigvuldigen en delen. Duur gezegd: het platte vlak is voorzien van een 'rijkere rekenkundige structuur'.

In dit hoofdstuk bespreken we ook het verband tussen complexe getallen en poolcoördinaten. Dat verband blijkt handig uigebuit te kunnen worden bij vermenigvuldigingen.

Uiteraard brengt dit verband met het platte vlak de complexe getallen in beeld als mogelijk middel om problemen aan te pakken die zich in het platte vlak afspelen. Deze link tussen complexe getallen en meetkunde buiten we uit bij het beschrijven van fractals in hoofdstuk 8.

Hoofdstuk 6: De complexe e-macht

De complexe e-macht is een generalisatie van de gewone exponentiële functie. De complexe e-macht is in de complexe wereld net zo belangrijk als de reële e-macht in de reële wereld. Voor ons ligt het belang vooral daarin dat de complexe e-macht berekeningen met cosinus en sinus vereenvoudigt. Een opmerkelijke toepassing: via een complexe omweg hebben we meer vat op goniometrische functies.

Hoofdstuk 7: Meetkunde en complexe getallen

In dit hoofdstuk zie je dat je complexe getallen kunt gebruiken om (sommige) stellingen uit de vlakke meetkunde te bewijzen. Met name als er hoeken van 30, 60 of 90 graden in het spel zijn, heeft deze aanpak wel eens succes. Het gebruik van complexe getallen in de meetkunde zoals hier beschreven, wordt ook in meetkundesoftware zoals Cabri en Cinderella gebruikt.

Hoofdstuk 8: Fractals

Een toepassing van complexe getallen die fraaie plaatjes oplevert betreft zogenaamde fractals. Hiervoor hebben we de link met het platte vlak nodig. Herhaald uitvoeren van betrekkelijk eenvoudige recepten met wat kleuringsvoorschriften leidt tot heel bijzondere plaatjes.

Dit is ook het hoofdstuk waarin computersoftware een belangrijke rol speelt. Met deze software en de achtergrond in complexe getallen kun je mooie plaatjes produceren.

Hoofdstuk 9: De gehelen van Gauss

De gehelen van Gauss zijn complexe getallen die in een aantal opzichten erg veel lijken op gewone gehele getallen. Zo kun je er bijvoorbeeld ook ontbinden in (complexe) priemfactoren. Gauss bestudeerde deze getallen onder meer om allerlei vergelijkingen te kunnen aanpakken waarbij gezocht werd naar geheeltallige oplossingen. Het bleek dat een 'complexe omweg' wel eens erg nuttig was.

Hoofdstuk 9: Quaternionen

Toen men eenmaal over complexe getallen beschikte, was het hek van de dam in de zin dat men zich afvroeg of er nog meer (redelijke) getalsystemen bestaan. Hamilton kwam op het spoor van een getalsysteem dat in een aantal opzichten lijkt op de complexe getallen, maar wel groter is: de quaternionen. Dit getalsysteem heeft ook bijgedragen aan de ontwikkeling van de vectorrekening en wordt bijvoorbeeld in de wereld van de computer graphics gebruikt.

Hoofdstuk 1

Wortels en letterrekenen

1.1 *Rekenen met symbolen die aan relaties voldoen.*
Om met complexe getallen te kunnen werken, is het van belang te kunnen rekenen met symbolen ('letterrekenen') waarbij we één extra aspect willen benadrukken: het rekenen met een symbool waarvan we weten dat het symbool aan een of andere relatie voldoet. In deze sectie rekenen we met een symbool waarvan het kwadraat gelijk is aan 2.

1.2 *Vooraf: de gelijkheid* $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
In deze sectie speelt de identiteit

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

voor reële getalen a en b een essentiële rol, vooral in verband met wortels. Aan de hand van de volgende regel zie je wat het effect van de gelijkheid kan zijn:

$$(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 3^2 - (2\sqrt{2})^2 = 9 - 8 = 1,$$

d.w.z. de wortel is verdwenen. Bij een breuk als

$$\frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}$$

komt de gelijkheid van pas om de wortel uit de noemer te halen:

$$\frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} \cdot \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

1.3 *Rekenen met een abstracte wortel uit 2*
Stel je eens voor dat je nog niets van reële getallen wist. Je kennis beperkte zich tot de rationale getallen, de breuken. Vergelijkingen zoals

$$3x + 8 = 0$$

leverden geen probleem op. Maar vroeg of laat liep je tegen een vergelijking op zoals

$$x^2 - 2 = 0.$$

Geen breuk die je probeerde leverde het antwoord op.

Laten we ons eens op het standpunt stellen dat we niet primair in de numerieke waarde van een oplossing geïnteresseerd zijn, maar wel in de manier waarop je algebraïsch met een mogelijke oplossing rekent. Dat betekent dat we gaan rekenen met een getal α waarvan we weten dat het kwadraat gelijk is aan 2. We zijn in dit verhaal niet geïnteresseerd in de numerieke waarde van α (en evenmin of we de positieve of negatieve wortel bedoelen; dat is een reden waarom we liever een letter gebruiken dan $\sqrt{2}$; een andere reden is dat met het gebruik van een letter de analogie met de later in te voeren complexe getallen groter is) en beperken ons tot de rekenkundige operaties optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. In onze berekeningen laten we α staan, maar kunnen we α^2 vervangen door 2, en α^3 door 2α omdat $\alpha^3 = \alpha^2 \cdot \alpha = 2\alpha$, enz.

1.4 **Voorbeeld** Uitwerken van het product van $2 + 3\alpha$ en $1 - \alpha$ levert de volgende berekening:

$$(2+3\alpha)(1-\alpha) = 2\cdot 1 - 2\cdot\alpha + 3\alpha\cdot 1 - 3\alpha^2 = 2 + (-2+3)\cdot\alpha - 3\cdot 2 = -4+\alpha.$$

De derdemacht van $2 + \alpha$ werkt uit tot (bij het eerste =–teken is het binomium van Newton gebruikt, zie eventueel §10)

$$\begin{aligned}(2+\alpha)^3 &= 2^3 + 3\cdot 2^2\cdot\alpha + 3\cdot 2\cdot\alpha^2 + \alpha^3\\ &= 8 + 12\alpha + 6\alpha^2 + \alpha^3 = 8 + 12\alpha + 12 + 2\alpha = 20 + 14\alpha.\end{aligned}$$

1.5 *Optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met deze getallen.*
Als we starten met rationale getallen en met α kunnen we door optellen, aftrekken, vermenigvuldigen getallen krijgen zoals

$$3 + 4\alpha,\ \frac{2}{3} - \alpha + 5\alpha^3,\ 17\alpha - 21\alpha^2 + \frac{31}{13}\alpha^{10}.$$

Zo ongeveer de eenvoudigste combinatie heeft de gedaante $a + b\alpha$ met a en b rationale getallen, bijvoorbeeld $3 + 4\alpha$. Het bijzondere is dat al die andere getallen die er staan er wel anders uitzien, maar steeds te herleiden zijn tot deze vorm. Zo is bijvoorbeeld (niet geheel vereenvoudigd):

$$17\alpha - 21\alpha^2 + \frac{31}{13}\alpha^{10} = 17\alpha - 21\cdot 2 + \frac{31}{13}2^5 = (\frac{31}{13}2^5 - 42) + 17\alpha.$$

In feite blijken de getallen van de vorm $a + b\alpha$ een gesloten rekensysteem te vormen ten aan zien van de rekenkundige operaties optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. (Dat wil zeggen: als je start met twee getallen van die vorm en je past een van de rekenkundige bewerkingen toe, dan is het resultaat ook te herleiden tot diezelfde vorm.) Kijk eerst maar eens naar de volgende concrete voorbeelden:

- $(2 + 3\alpha)(4 - 5\alpha) = 2\cdot 4 - 3\cdot 5\alpha^2 + (2\cdot(-5) + 3\cdot 4)\alpha = -22 + 2\alpha.$

- $\dfrac{\alpha}{2-\alpha} = \dfrac{\alpha}{2-\alpha} \cdot \dfrac{2+\alpha}{2+\alpha} = \dfrac{\alpha(2+\alpha)}{(2-\alpha)(2+\alpha)} = \dfrac{2+2\alpha}{2} = 1+\alpha.$

Zowel het product als het quotiënt zijn (na enig gereken) in de gedaante $a + b\alpha$ met a en b rationaal te krijgen. Als je de 'geslotenheid' van het rekensysteem echt wilt doorgronden, moet je het nu volgende argument bekijken.

- **Optellen en aftrekken**. Als we twee getallen $a_1 + b_1\alpha$ en $a_2 + b_2\alpha$ optellen vinden we na enig herschikken:

$$(a_1 + b_1\alpha) + (a_2 + b_2\alpha) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\alpha.$$

Het getal in het rechterlid is inderdaad van de gewenste vorm. Voor aftrekken is de situatie vergelijkbaar:

$$(a_1 + b_1\alpha) - (a_2 + b_2\alpha) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\alpha.$$

- **Vermenigvuldigen**. Bij vermenigvuldigen hebben we de rekenregel $\alpha^2 = 2$ echt nodig:

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1\alpha) \cdot (a_2 + b_2\alpha) &= a_1a_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)\alpha + b_1b_2\alpha^2 \\ &= (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\alpha.\end{aligned}$$

Weer is het antwoord van de vorm $r + s\alpha$ met r en s rationaal. Een concreet voorbeeld:

$$(3 + 4\alpha)(1 + 2\alpha) = 3 \cdot 1 + (3 \cdot 2 + 4 \cdot 1)\alpha + 4 \cdot 2\alpha^2 = 19 + 10\alpha.$$

- **Delen**. Bij delen moeten we niet alleen de relatie $\alpha^2 = 2$ inzetten, maar ook de bijzondere identiteit $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ uit het begin van het hoofdstuk. Die laatste identiteit is nodig om de noemer aan te pakken. Eerst maar eens aan de hand van een concreet voorbeeld.

$$\frac{4+6\alpha}{1+\alpha} = \frac{4+6\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{1-\alpha}{1-\alpha} = \frac{(4+6\alpha)(1-\alpha)}{(1+\alpha)(1-\alpha)} = \frac{-8+2\alpha}{-1} = 8 - 2\alpha.$$

We komen weer op een getal van de gewenste gedaante uit. Nu het abstracte geval (houd je vast, want dit ziet er niet zo doorzichtig uit):

$$\frac{a_1 + b_1\alpha}{a_2 + b_2\alpha} = \frac{a_1 + b_1\alpha}{a_2 + b_2\alpha} \cdot \frac{a_2 - b_2\alpha}{a_2 - b_2\alpha} = \frac{(a_1 + b_1\alpha)(a_2 - b_2\alpha)}{(a_2 + b_2\alpha)(a_2 - b_2\alpha)}.$$

De teller werkt uit tot $a_1a_2 - 2b_1b_2 + (-a_1b_2 + a_2b_1)\alpha$, de noemer tot $a_2^2 - 2b_2^2$. In totaal vinden we dus:

$$\frac{a_1a_2 - 2b_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2} + \frac{-a_1b_2 + a_2b_1}{a_2^2 - 2b_2}\alpha.$$

en dit is ook weer van de gewenste vorm.

Samengevat:

1.6 **Stelling** De getallen van de vorm $a + b\alpha$ met rationale a en b vormen een gesloten rekensysteem: som, verschil, product en quotiënt van twee van dergelijke getallen levert weer een getal van die vorm op (al is soms enige herleiding nodig om die vorm te realiseren). Dit rekensysteem duidt men wel aan met $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$; het is een uitbreiding van de verzameling $\mathbb{Q}$ van rationale getallen.

Opgaven bij hoofdstuk 1

1 Machtsverheffen waarbij de exponent een geheel getal is, is natuurlijk te zien als herhaald vermenigvuldigen of delen. Met uitdrukkingen als $(1+\alpha)^5$ blijven we dus ook in ons rekensysteem. Herleid elk van de volgende getallen tot de gedaante $a + b\alpha$ met a en b rationaal.

(a) $3 + 2\alpha - 3\alpha^3$

(b) $(5 + \alpha)(1 - \alpha)$

(c) $1 - \alpha^{100}$

(d) $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1+\alpha}}}$

(e) $4 - 2\alpha + 7\alpha^5$

(f) $(3 + \alpha)(5 - \alpha)(1 + 2\alpha)$

(g) $\dfrac{2+\alpha}{\alpha + 5}$

(h) $\dfrac{\alpha^3 - 4}{2\alpha + 3}$

(i) $\dfrac{\alpha + 2}{(\alpha - 1)(\alpha + 3)}$

2 Start met twee getallen $a + b\alpha$ en $c + d\alpha$ waarin $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, d.w.z. waarin a, b, c, d rationale getallen zijn. Vermenigvuldigen van de twee getallen levert (na enig herleiden)

$$(a + b\alpha) \cdot (c + d\alpha) = ac + 2bd + (bc + ad)\alpha$$

en is dus van de vorm $r + s\alpha$ met r en s rationaal. In dit geval is r gelijk aan het rationale getal $ac + 2bd$, en is s gelijk aan het rationale getal $bc + ad$. Elk van de getallen

$$(a + b\alpha) + (c + d\alpha), \quad (a + b\alpha) - (c + d\alpha) \text{ en } \frac{a + b\alpha}{c + d\alpha}$$

is op soortgelijke wijze (zie ook tekst) te herleiden tot de vorm $r + s\alpha$ voor zekere rationale getallen r en s. Dat levert formules op voor som, verschil, product en quotiënt. Geef aan wat jij bij het rekenen in dit getalsysteem gebruikt: zulke formules of andere handige informatie over het systeem.

3 Deze opgave toont wat andere aspecten van het herleiden van breuken.

(a) Om na te gaan of $1/\alpha$ te schrijven is in de vorm $r_0 + r_1\alpha$ (met r_0 en r_1 rationale getallen) kunnen we bijvoorbeeld proberen $1/\alpha = r_0 + r_1\alpha$ ofwel $1 = r_0\alpha + r_1\alpha^2$ op te lossen, d.w.z. $1 = 2r_1 + r_0\alpha$. Wat volgt hieruit voor r_0 en r_1?

(b) Kun je de aanpak van (a) aanpassen om α te verwijderen uit de noemer van

$$\frac{1 + 2\alpha}{3 - 4\alpha}?$$

Waar geef je de voorkeur aan: de methode à la onderdeel (a) of de methode uit de tekst (teller en noemer met $3 + 4\alpha$ vermenigvuldigen)?

(c) Herschrijf $(1 + \alpha)^{100}(1 - \alpha)^{100}$ in de vorm $a + b\alpha$ met a en b rationaal. Bepaal zelf welke methode je gebruikt.

(d) Herleid

$$\frac{2-\alpha}{(1+\alpha)(2\alpha+1)}.$$

tot de gedaante $a + b\alpha$ met a en b rationaal.

4 Elk getal uit deze sectie is te herleiden tot een getal van de vorm $a + b\alpha$ met a en b rationaal. Onder optellen, aftrekken enz. geeft dit een gesloten rekensysteem. Als je nu voor a en voor b zelf weer getallen van de vorm $r + s\alpha$ zou toelaten, zoals bijvoorbeeld

$$(2+3\alpha)\cdot 5 + (6-5\alpha)\cdot 13\alpha,$$

krijg je dan getallen die niet in ons rekensysteem zitten, of krijg je niets nieuws?

5 *Een rekensysteem met $\sqrt{3}$ of met $\sqrt[3]{2}$?*

(a) Onderzoek of je $(1+\sqrt{3})^2$ en $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$ kunt herleiden tot getallen van de vorm $a + b\sqrt{3}$ met a en b rationaal.

b) Vormen de getallen van de vorm $a + b\sqrt{3}$ met a en b rationaal een gesloten rekensysteem onder de gebruikelijke vier rekenkundige bewerkingen? Zo ja, maak dan enkele onderdelen uit Opgave 1, waar α nu voldoet aan $\alpha^2 = 3$.

(c) En de verzameling getallen van de vorm $a+b\sqrt[3]{2}$ met a en b rationaal? (Je hoeft je antwoord alleen maar aannemelijk te maken.)

6 *Getallensystemen zoals $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ en vergelijkingen.*
Het getallensysteem $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ is nuttig bij het zoeken naar en beschrijven van oplossingen van de vergelijking $x^2 - 2y^2 = 1$ in *gehele* getallen. Deze opgave gaat daarover. Een oplossing raden zoals $x = 3$, $y = 2$ is niet moeilijk, maar andere oplossingen achterhalen vraagt om een systematische aanpak.

a) Leid af dat je de vergelijking $x^2 - 2y^2 = 1$ ook kunt schrijven als $(x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = 1$. De vraag naar oplossingen kun je dus ook als volgt lezen: zoek getallen van de vorm $a + b\sqrt{2}$ met a en b geheel zodat $(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = 1$. Laat zien dat $3 + 2\sqrt{2}$ zo'n getal is. Dit getal hoort natuurlijk bij de oplossing $x = 3$ en $y = 2$ van de vergelijking $x^2 - 2y^2 = 1$.

(b) Leid af dat $(3+2\sqrt{2})^2(3-2\sqrt{2})^2$ gelijk is aan 1. Waarom is $(3+2\sqrt{2})^2$ ook zo'n getal als in a) bedoeld is?

c) Waarom leveren alle getallen van de vorm $(3 + 2\sqrt{2})^m$, met m een positief geheel getal, oplossingen van de vergelijking $x^2 - 2y^2 = 1$? Bepaal een aantal oplossingen van de vergelijking $x^2 - 2y^2 = 1$.

7 *De vergelijking $x^2 - 2y^2 = -1$.*
Ook oplossingen van de vergelijking $x^2-2y^2 = -1$ kun je opsporen met behulp van $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

(a) Waarom kun je de vergelijking schrijven als $(x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = -1$? Welke oplossing van $x^2 - 2y^2 = -1$ kun je uit $1 + \sqrt{2}$ afleiden?

(b) Onderzoek welke getallen van de vorm $(1 + \sqrt{2})^m$ met m positief geheel bij oplossingen van de vergelijking $x^2 - 2y^2 = -1$ horen. [Hint: is $(1 + \sqrt{2})^m$ van de vorm $a + b\sqrt{2}$?]

8 *Voor de preciezen: de irrationaliteit van* $\sqrt{2}$

Misschien is het je opgevallen dat we bij delingen geen aandacht hebben besteed aan de vraag of de noemer wel eens 0 zou kunnen zijn. Natuurlijk, als we delen door $a + b\alpha$ bedoelen we impliciet dat $a + b\alpha$ niet gelijk is aan 0. Maar gevaarlijker wordt het bijvoorbeeld als we teller en noemer van een breuk met $a - b\alpha$ vermenigvuldigen omdat in de oorspronkelijke breuk $a + b\alpha$ in de noemer voorkomt. Wie garandeert dan dat $a - b\alpha \neq 0$? Nu blijkt het zo te zijn dat $a + b\alpha = 0$ precies dan als a en b beide gelijk zijn aan 0. In deze opgave schetsen we waarom.

(a) Veronderstel dat $a + b\alpha = 0$ (met a en b rationaal). Laat zien dat als $a = 0$ ook $b = 0$ moet zijn, en dat als $b = 0$ ook $a = 0$ moet zijn. Concludeer dat of a en b beide gelijk zijn aan 0 of beide $\neq 0$ zijn. We mogen dus verder wel veronderstellen dat a en b geen van beide gelijk zijn aan 0.

(b) Veronderstel dat a een breuk is met noemer m en b een breuk met noemer n. Met welk getal ($\neq 0$) kunnen we $a + b\alpha$ vermenigvuldigen zodat een getal $r + s\alpha$ ontstaat waarin r en s beide gehele getallen zijn (en $\neq 0$)?

(c) Leid af dat $r^2 = 2s^2$.

(d) (Om dit deel van het bewijs volledig te krijgen, heb je wat meer algebra nodig, maar het grondidee kun je wel volgen.) Elk van de getallen r^2 en $2s^2$ kan ontbonden worden in priemgetallen (dat zijn positieve gehele getallen > 1 die alleen door zichzelf en door 1 deelbaar zijn; voorbeelden: 2, 3, 5, 7, 11). Waarom zou de ontbinding van r^2 een even aantal factoren 2 bevatten? En waarom zou $2s^2$ een oneven aantal factoren 2 bevatten? Omdat $r^2 = 2s^2$ krijgen we dus een tegenspraak. De veronderstelling dat $a + b\alpha = 0$ en dat a en b beide $\neq 0$ zijn is onhoudbaar gebleken. We moeten concluderen dat a en b beide 0 zijn.

Je kunt het resultaat van deze opgave ook als volgt uitdrukken: het getal $\sqrt{2}$ is niet uit te drukken als breuk van twee gehele getallen:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

zou namelijk leiden tot $a - b\sqrt{2} = 0$ en dat levert $a = -b = 0$. Men zegt: $\sqrt{2}$ is *irrationaal*.

Hoofdstuk 2

Op het spoor van complexe getallen

2.1 *Over de oorsprong van de complexe getallen*

Zoals je weet zijn er geen reële getallen die voldoen aan de kwadratische vergelijking

$$x^2 + 1 = 0.$$

Voor elk reëel getal x is x^2+1 namelijk positief. In het verleden is bedacht dat het toch wel eens nuttig zou kunnen zijn om over nieuwe getallen te beschikken die als oplossing kunnen fungeren van zo'n vergelijking. Dat is niet zo raar als het klinkt. In feite is bij de je bekende getalsystemen iets soortgelijks gebeurd. Zo zijn de negatieve getallen mede ingevoerd om over oplossingen van bijvoorbeeld

$$x + 7 = 0$$

te kunnen spreken en om $3 - 8$ betekenis te geven net als $8 - 3$. Vergelijkingen zoals

$$3x - 8 = 0$$

vereisen de invoering van de rationale getallen (breuken) en vergelijkingen zoals

$$x^2 - 2 = 0$$

vereisen de invoering van bijvoorbeeld de reële getallen. Om vergelijkingen als $x^2 + 1 = 0$ te kunnen hanteren, zijn de complexe getallen ingevoerd. Deze vondst is niet van de ene op de andere dag gebeurd, maar werd in gang gezet door een probleem waartegen men in de 15e eeuw aanliep (in Italië). In de 15e eeuw was men op zoek naar formules om hogeregraads vergelijkingen te kraken. Lineaire en kwadratische vergelijkingen vormden inmiddels geen probleem meer. In de huidige notatie weergegeven luidt de oplossing van de algemene lineaire vergelijking $ax + b = 0$:

$$x = -\frac{b}{a}$$

mits $a \neq 0$. Voor de kwadratische vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ zijn er meestal twee oplossingen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

mits $a \neq 0$. In de 15e eeuw kwam men op het spoor van de formule voor de derdegraads vergelijking

$$x^3 + px + q = 0.$$

Hierin zijn p en q constanten (deze derdegraads vergelijking is een speciaal geval van de algemene derdegraads vergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$). Deze vergelijking heeft in het algemeen drie oplossingen, besloten in de formule

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}},$$

de *formule van Cardano* (dat hier in feite – meestal – drie oplossingen blijken te staan, kunnen we pas goed begrijpen als we over complexe getallen beschikken).

2.2 *Hoe de formule van Cardano tot raadsels leidde*
Laten we eens naar een voorbeeld kijken waaruit blijkt hoe men vroeger, voor de uitvinding van de complexe getallen, voor raadsels kwam te staan bij het gebruik van deze formule. We gaan uit van de derdegraadsvergelijking

$$x^3 - 87x - 130 = 0$$

(dus $p = -87$ en $q = -130$). Het is gemakkelijk na te gaan dat $x = 10$ een oplossing is van de vergelijking, maar gebruik van de formule leidt tot de verschrikkelijke uitdrukking

$$\sqrt[3]{65 + \sqrt{(-65)^2 + (-29)^3}} + \sqrt[3]{65 - \sqrt{(-65)^2 + (-29)^3}}.$$

Een beetje herschrijven lukt nog wel:

$$\sqrt[3]{65 + \sqrt{-20164}} + \sqrt[3]{65 - \sqrt{-20164}},$$

maar dan? Omdat $\sqrt{-20164}$ niet bestaat, lijkt het hier op te houden. Toch wilde men de gevonden formule niet opgeven. Zou er niet een manier zijn, zo vroeg men zich af, om toch verder te rekenen met $\sqrt{-20164}$ en dan uiteindelijk bij 10 uit te komen? Hieronder schetsen we zo'n manier. Veel meer dan schetsen kunnen we niet doen, omdat een solide afleiding nu juist een degelijk begrip van de complexe getallen vereist. Probeer de afleiding dus alleen maar globaal te volgen.

2.3 *Nieuwe getallen*
Het zin geven aan op het oog onmogelijke worteluitdrukkingen lag ten grondslag aan de moedige beslissing om een nieuw getal in te voeren waarvan het kwadraat, per definitie, gelijk is aan −1. Dat getal noemt men, sinds Euler (1707–1783), i. Dan zou men

$$\sqrt{-20164}$$

kunnen vereenvoudigen tot $142i$:

$$(142i)^2 = 142^2 \cdot i^2 = 20164 \cdot (-1) = -20164.$$

De volgende stap bestaat eruit een getal te vinden waarvan de derde macht gelijk is aan $65 + 142i$. Het getal $5 + 2i$ blijkt daaraan te voldoen, vanwege (denk eraan: niet erg als je het niet in detail kunt volgen)

$$\begin{aligned}(5+2i)(5+2i)(5+2i) &= (5+2i)(25+20i+4i^2)\\ &= (5+2i)(21+20i)\\ &= 105+100i+42i-40 = 65+142i.\end{aligned}$$

terwijl

$$(5-2i)^3 = 65 - 142i.$$

Op deze manier komen we uiteindelijk terecht bij

$$\sqrt[3]{65+\sqrt{-20164}} + \sqrt[3]{65-\sqrt{-20164}} = (5+2i) + (5-2i) = 10.$$

Met dit extra getal i bleek de formule toch zinvol te zijn.

In de komende hoofdstukken introduceren we de complexe getallen op een preciese manier en bekijken we waar ze een rol spelen.

2.4 **Opmerking** Het is een gelukkige omstandigheid dat het mogelijk blijkt op een consistente manier de reële getallen uit te breiden zodat onder andere bovenstaande formule zinvol wordt. Je mag niet verwachten dat elk probleem zomaar verder gebracht kan worden door iets nieuws te definiëren. Consistentie van de nieuwe concepten met de bestaande is een must!

Opgaven bij hoofdstuk 2

1 De formule van Cardano, toegepast op de vergelijking $x^3 - 6x - 40 = 0$, levert

$$\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}},$$

terwijl $x = 4$ natuurlijk een oplossing is. In dit geval staat er onder het gewone wortelteken geen negatief getal, maar hebben we toch een probleem met het herkennen van het getal 4 in de worteluitdrukking. Hieronder volgen we de manier die Rafael Bombelli(1526–1572) ontwikkelde om de wortels te vereenvoudigen.

(a) Net zoals we $\sqrt{8}$ kunnen herschrijven tot $2\sqrt{2}$ (en dat is voor sommige doeleinden een geschiktere gedaante), zo kunnen we ook $\sqrt{392}$ wat herschrijven en dat blijkt voor dit probleem relevant. Doe dat.

(b) Bombelli probeerde eerst $\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}}$ te vereenvoudigen. Wegens (a) kunnen we bijvoorbeeld hopen dat deze derdemachtswortel van de vorm $c + d\sqrt{2}$ met gehele c en d is. Probeer deze weg in te slaan door de vergelijking $c + d\sqrt{2} = \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}}$ aan te pakken. Misschien komt de formule voor $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ van pas.

(c) Als je uit (b) bent gekomen, kun je misschien op dezelfde manier de andere derdemachtswortel aanpakken. Of je kunt misschien een gok wagen en verifiëren of je gok deugt. Voltooi de berekening.

(d) Bombelli's aanpak leidt tot het goede antwoord, maar die garantie is er niet gaandeweg de berekening. Waarom niet?

Werk je de vergelijking $(x - 1)(x - 2)(x + 3) = 0$ (met oplossingen 1, 2 en −3) uit tot $x^3 - 7x + 6 = 0$ en pas je Cardano toe dan kom je ook weer in moeilijkheden. In de formule duikt

$$\sqrt[3]{-81 + 30\sqrt{-3}}$$

op (en dat blijkt onder andere $3 + 2\sqrt{-3}$ te zijn). Een en ander laat zien dat de praktische waarde van formules soms erg beperkt is. De dieperliggende wiskundige structuur blijkt vaak veel nuttiger kennis.

2 De formule van Cardano toegepast op de vergelijking $x^3 - 21x - 90 = 0$ levert

$$\sqrt[3]{45 + \sqrt{1682}} + \sqrt[3]{45 - \sqrt{1682}},$$

terwijl $x = 6$ natuurlijk een oplossing is zoals je door invullen kunt nagaan. Analyseer deze uitdrukking net als in de vorige opgave.

(a) Zoek een kwadraat dat 1682 deelt en herschrijf daarmee $\sqrt{1682}$.

(b) Herschrijf $\sqrt[3]{45+\sqrt{1682}}$ als een derdemachtswortel van de vorm $c + d\sqrt{2}$ met gehele getallen c en d. Leid af dat dit tot de vergelijkingen $c(c^2 + 6d^2) = 45$ en $d(3c^2 + 2d^2) = 29$ voert (gebruik de formule $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$). Als c en d geheel moeten zijn, waarom volgt dan uit de tweede vergelijking $d = 1$? Zoek nu ook c.

(c) Pak nu de andere derdemachtswortel aan en voltooi de berekening.

Hoofdstuk 3

Rekenen met complexe getallen

3.1 De verzameling der complexe getallen

3.1 *De definitie van complexe getallen*

Figuur 3.1 Sir William Rowan Hamilton (1805–1865) gaf als eerste een formeel correcte opbouw van de complexe getallen met behulp van paren reële getallen (a, b).

Een *complex getal* is een uitdrukking van de vorm $a + bi$ waarin a en b reële getallen zijn, bijvoorbeeld $2 + 5i$ of $\sqrt{2} - 3i$. Het symbool i is gereserveerd voor een nieuw getal, vergelijkbaar met het gebruik van α uit §1. We gaan rekenen met deze uitdrukkingen, maar nu met de extra rekenregel dat $i \cdot i$ of i^2 gelijk is aan -1. Precies zoals we ook rekenden met uitdrukkingen van de vorm $a + b\alpha$, waarin we de regel $\alpha^2 = 2$ hanteerden. Het symbool i is dus vanaf nu gereserveerd voor een speciaal complex getal.

Een voorproefje van het rekenen met complexe getallen: de som van $2 + 6i$ en $3 + 4i$ is $5 + 10i$; het product $(1 + 2i)i$ van $1 + 2i$ en i is gelijk aan $i + 2i^2$ en dat is $-2 + i$. Straks volgt een uitgebreide discussie over rekenen met complexe getallen. Eerst volgen enkele opmerkingen over de notatie van deze nieuwe getallen.

- Als b gelijk is aan 1, dan schrijven we meestal $a + i$ in plaats van $a + 1i$. Net zo, als $b = -1$, dan schrijven we meestal $a - i$ in plaats van $a - 1i$.

- Als $a = 0$, dan schrijven we kortweg bi; als $b = 0$, dan schrijven we gewoon a. (Maar het is niet verboden om $0 + bi$ of $a + 0i$ te schrijven.) In het bijzonder schrijven we i in plaats van $0 + 1i$. In plaats van $0 + 0i$ schrijven we vaak 0.

- In plaats van $a + bi$ schrijven we ook wel $a + ib$ (de volgorde van i en b is veranderd), zeker als er verwarring dreigt. Zo schrijven we liever $i\sqrt{2}$ dan $\sqrt{2}i$ omdat in de laatste expressie misschien niet zo duidelijk is dat het wortelteken enkel op 2 betrekking heeft. Eventueel kunnen we, ter wille van de duidelijkheid, ook schrijven $\sqrt{2} \cdot i$.

- Je mag ook $bi + a$ schrijven in plaats van $a + bi$.

- De complexe getallen $a + 0i$ met a reëel zijn de gewone reële getallen. Elk reëel getal a is dus ook een complex getal.

- Soms komen we complexe getallen in iets andere vorm tegen dan in de vorm $a + bi$ met a en b reëel. Daarover later meer.

- Complexe getallen geven we ook wel met een enkele letter weer. De letter z is dan favoriet, gevolgd door de letter w. Je kan dus zoiets tegenkomen als: 'laat z een complex getal zijn', of: 'het product zw van de complexe getallen z en w is gelijk aan het product wz'. Het gebruik van deze letters is geen verplichting (dus 'we gaan het complexe getal a kwadrateren' is prima), maar meer een gewoonte onder wetenschappers. Wanneer men zowel een expliciet complex getal nodig heeft en dat getal bovendien graag met een enkele letter aanduidt, schrijft men bijvoorbeeld: 'laat $z = x + iy$ ...'

- Net zoals de gehele getallen meer specifieke eigenschappen hebben dan de rationale getallen, zo verliezen bij de overgang naar de complexe getallen ook wat begrippen uit de wereld van de reële getallen hun zin. Je blijkt bijvoorbeeld niet meer op een zinnige manier over positief en negatief te kunnen spreken. Ook daarover later meer.

- Gelukkig blijkt er, net als voor reële getallen, een meetkundige voorstelling van complexe getallen te zijn. Daarop gaan we in het volgende hoofdstuk in. Die voorstelling helpt enorm bij het rekenen met complexe getallen. Voor nu volstaat de opmerking dat de complexe getallen *niet* op de gewone getallenlijn in te passen zijn.

3.2 *De verzameling complexe getallen*

De verzameling van alle complexe getallen noteren we met $\mathbb{C}$. We hebben dan:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

3.3 *Reële en imaginaire deel van een complex getal*
Twee complexe getallen $a+bi$ en $c+di$ zijn alleen aan elkaar gelijk als $a = c$ en $b = d$. Bij elk paar reële getallen (a, b) hoort dus precies één complex getal, namelijk $a + bi$. Het getal a heet het *reële deel* van het complexe getal $a + bi$; het getal b heet het *imaginaire deel* van $a + bi$. Zowel het reële als het imaginaire deel van een complex getal zijn dus zelf reëel. Voor reële deel en imaginaire deel zijn speciale notaties ingevoerd:

$$\mathrm{Re}(a + bi) = a, \ \ \mathrm{Im}(a + bi) = b.$$

Een complex getal waarvan het reële deel gelijk is aan 0 heet wel *zuiver imaginair*. Het is dus van de vorm

$$bi$$

met b reëel.

Voor we gaan rekenen met complexe getallen, eerst wat voorbeelden.

3.4 Voorbeelden

- $i\sqrt{3}$ is kort voor het complexe getal $0 + i\sqrt{3}$.
- $\mathrm{Re}(i\sqrt{3} + 2) = 2$.
- $2 = 2 + 0 \cdot i$.
- $\mathrm{Im}(7 - 6i) = -6$. Let goed op: het imaginaire deel is dus zelf een reëel getal.
- $i\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{2} \cdot i$.
- De getallen $3+4i$ en $3+5i$ zijn verschillend, omdat hun imaginaire delen (4 resp. 5) verschillend zijn.

3.5 *Optellen en aftrekken*
Nu moeten we nog afspreken hoe we met complexe getallen de rekenkundige operaties optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen uitvoeren. Zoals al aangekondigd, gaan we gewoon op de gebruikelijke manier symbolisch rekenen met onze nieuwe uitdrukkingen. We geven alleen i een wat speciale behandeling, omdat we op de vorm $a+bi$ willen uitkomen. Die speciale behandeling komt er bij het optellen en aftrekken op neer dat we wat schuiven met de volgorde van de termen, de coëfficiënten van de termen waarin i voorkomt (de imaginaire delen) verzamelen en wat haakjes (ver)zetten. Kijk maar:

$$(1 + 2i) + (\sqrt{2} - 7i) = (1 + \sqrt{2}) + (2 - 7)i = (1 + \sqrt{2}) - 5i.$$

Kortom, de regel voor het optellen luidt:

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i.$$

(Formeel moet je zeggen dat dit een definitie is van de optelling, omdat je buiten het gebruikelijke getalsysteem van de reële getallen bent getreden.) Het reële deel van de som is de som van de reële delen van de twee oorspronkelijke complexe getallen. Het imaginaire deel van de som is de som van de imaginaire delen van de twee complexe getallen. Op soortgelijke wijze is aftrekken gedefinieerd:

$$(a + bi) - (c + di) := a - c + (b - d)i.$$

Bijvoorbeeld:

$$(23 - 7i) - (8 + 32i) = (23 - 8) + (-7 - 32)i = 15 - 39i.$$

Misschien valt je nog niets speciaals aan het gebruik van i op. Dat klopt: het speciale karakter van i komt bij de optelling en de aftrekking nog niet naar voren, maar pas bij de vermenigvuldiging en deling.

3.6 *De complexe optelling generaliseert de optelling van reële getallen*
Merk op dat deze operaties de optel– en aftrekoperaties op de reële getallen generaliseren: als a en c reële getallen zijn, en we tellen de bijbehorende complexe getallen $a + 0 \cdot i$ en $c + 0 \cdot i$ op, dan krijgen we volgens bovenstaande afspraak:

$$(a + 0 \cdot i) + (c + 0 \cdot i) = (a + c) + (0 + 0)i = (a + c) + 0 \cdot i.$$

Het complexe getal $(a+c)+0 \cdot i$ is natuurlijk gewoon het reële getal $a+c$, de som van a en c.

3.7 **Voorbeelden** (a) Als we $1 + i$ en $7 - 6i$ optellen, vinden we $(1 + 7) + (1 - 6)i$, dat wil zeggen $8 - 5i$.

(b) $(3 + i\sqrt{2}) - (\sqrt{5} + i) = (3 - \sqrt{5}) + (\sqrt{2} - 1)i$. Het reële deel hiervan is $3 - \sqrt{5}$, het imaginaire deel is gelijk aan $\sqrt{2} - 1$.

(c) De som van 3 en $8i$ is $3 + 8i$.

3.8 *Vermenigvuldigen*
Bij vermenigvuldigen en delen gaat het speciale karakter van i een rol spelen. Eerst maar eens vermenigvuldigen. De gedachte achter (de definitie van) het vermenigvuldigen is de volgende: we willen graag dat de gebruikelijke rekenregels uit de wereld van de rationale en reële getallen zo veel mogelijk van kracht zijn in de wereld van de complexe getallen, met de extra rekenregel dat $i \cdot i$ (of i^2) gelijk is aan -1. Dat lijkt dus erg op het rekenen met ons symbool α uit een vorig hoofdstuk waarvan het kwadraat 2 is. Alleen bleven we daarbij binnen

de reële getallen en daar is al een optelling voorhanden. Omdat we van i gaan eisen dat $i^2 = -1$, kan i geen reëel getal zijn. We treden dus buiten het vertrouwde systeem van de reële getallen en moeten dus zelf voorschrijven wat vermenigvuldigen van onze nieuwe getallen betekent.

Laten we, uitgaande van de wensenlijst, kijken hoe we het product $(a + bi)(c + di)$ van $a + bi$ en $c + di$ zouden moeten definiëren.

- Als we aan de gebruikelijke rekenregels willen vasthouden, dan moeten we haken kunnen wegwerken:
$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bic + bidi.$$
- Het rechterlid moeten we kunnen herschrijven als $ac + (ad + bc)i + bdi^2$, omdat we een factor i uit $adi + bic$ moeten kunnen halen en omdat we in $bidi$ de volgorde moeten kunnen veranderen: $bidi = bdii = bdi^2$.
- Vervolgens, vanwege de nieuwe rekenregel over i, vervangen we i^2 door -1 en hergroeperen nog eens:
$$ac + (ad + bc)i + bd(-1) = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Kortom, onze definitie van het product moet wel zijn:
$$(a + bi)(c + di) := ac - bd + (ad + bc)i.$$

Dat ziet er niet zo doorzichtig uit, maar gelukkig blijk je deze definitie in de praktijk helemaal niet uit je hoofd te hoeven kennen. Het is beter te weten dat je producten met de gebruikelijke regels kunt uitwerken waarbij je moet bedenken dat elk tweetal factoren i door -1 vervangen mag worden. In de voorbeelden zie je hoe dat werkt.

3.9 Definitie Het *product* van de complexe getallen $a + bi$ en $c + di$ is gedefinieerd als
$$(a + bi)(c + di) := ac - bd + (ad + bc)i.$$

3.10 Voorbeeld Om het product $(\sqrt{2} + i)(\sqrt{2} - i)$ uit te werken, verdrijven we eerst de haakjes en gebruiken we vervolgens $i^2 = -1$:
$$(\sqrt{2} + i)(\sqrt{2} - i) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - i\sqrt{2} + i\sqrt{2} + i(-i) = 2 - i^2 = 2 - (-1) = 3.$$

3.11 *De vermenigvuldiging van complexe getallen generaliseert die van reële getallen*
Start met twee reële getallen a en c. In uitgebreide complexe notatie: $a+0\cdot i$ en $c+0\cdot i$. Pas nu de regel voor vermenigvuldigen toe (de definitie of werk gewoon het complexe product uit):
$$(a + 0 \cdot i)(c + 0 \cdot i) = (ac - 0 \cdot 0) + (a \cdot 0 + 0 \cdot c)i = ac + 0 \cdot i.$$

Kortom, we eindigen met ac, het 'gewone' product van de reële getallen a en c.

3.12 *Delen*

Delen blijkt ook mogelijk. We willen dan natuurlijk ook dat aan de gebruikelijke regels voldaan wordt. Maar al bij een eenvoudige deling, van 1 door i bijvoorbeeld, lopen we tegen een uitdrukking aan, namelijk

$$\frac{1}{i},$$

die bepaald niet op de vorm $a+bi$ lijkt. Wat is hier aan de hand? Dreigen we buiten de verzameling der complexe getallen te komen (net zoals we met de deling van 1 door 2 buiten de gehele getallen terecht komen)? Gelukkig niet. Als we willen dat we met breuken van complexe getallen op soortgelijke wijze kunnen rekenen als met breuken van reële getallen, dan kunnen we verder komen met behulp van een list die we al in §1 zijn tegengekomen. Vermenigvuldig namelijk met de breuk $\frac{i}{i}$, een moeilijke manier natuurlijk om 1 te zeggen:

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot 1 = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i.$$

Een aangepaste versie van de list werkt ook voor de breuk $\frac{1}{3+2i}$. Vermenigvuldig namelijk teller en noemer van de breuk met $3-2i$:

$$\frac{1}{3+2i} = \frac{1}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{3-2i}{13} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i.$$

(Reken maar na dat $(3+2i)(3-2i) = 3^2 + 2^2 = 13$.)

De list werkt ook voor de breuk $\frac{1}{a+bi}$. We vermenigvuldigen dan met $\frac{a-bi}{a-bi}$:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot 1 = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{1 \cdot (a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}.$$

Verder uitwerken levert:

$$\frac{a-bi}{a^2 - abi + bia + bi(-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

In het bijzonder blijkt bij breuken de regel $(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$ handig te zijn. Iets vergelijkbaars zagen we ook al bij de getallen $a + b\alpha$ uit §1. Als we breuken van de vorm

$$\frac{1}{a+bi}$$

eenmaal aankunnen, dan zijn breuken

$$\frac{a+bi}{c+di}$$

ook geen probleem meer. Dat laten we zien in het volgende voorbeeld.

3.13 Voorbeeld

$$\frac{1+i}{2+i} = \frac{1+i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{(1+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i+2i-i^2}{4-2i+2i-i^2} = \frac{3+i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \cdot i\,.$$

3.14 Opmerkingen

- Delen van complexe getallen generaliseert het delen van reële getallen. Dat leggen we verder niet uit, het is niet moeilijker dan de vergelijkbare opmerking over vermenigvuldigen.

- Uiteraard kunnen we ook machtsverheffen (met gehele exponenten): z^n met n positief geheel staat voor het product van n factoren z: $z \cdot z \cdots z$. Ook is
$$z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$
als n een positief geheel getal is.

- Voor de fijnproevers: zodra we zeggen dat we over de gebruikelijke rekenregels willen beschikken, eisen we misschien wel meer dan mogelijk is. Bij een getallensysteem als de quaternionen (zie Hoofdstuk 9) blijkt bijvoorbeeld de regel dat het niet uitmaakt in welke volgorde je de factoren van een product uitrekent, niet te handhaven.

- Complexe getallen zijn getallen van de vorm $a+bi$, maar zo komen we ze niet altijd tegen, zeker niet als we flink aan het rekenen zijn. Wat te doen als je bijvoorbeeld $\alpha + \beta i$ tegenkomt waarbij α en β zelf complexe getallen zijn? Is dat ook een complex getal? Het antwoord is 'ja' en via de rekenregels kun je ze eventueel in de gebruikelijke vorm schrijven. Bijvoorbeeld, $3 + (5 - 4i)i$ kun je uitwerken tot $3 + 5i - 4i^2 = 7 + 5i$.

- Kortom: we zullen er niet altijd op staan dat een complex getal wordt uitgewerkt naar de vorm $a + bi$ met a en b reëel. Het is maar net wat de vraag is.

- Hebben we nu $\sqrt{-1}$ gedefinieerd? Nee, nog niet. De vergelijking $z^2 = -1$ heeft twee oplossingen, i en $-i$, en we zouden moeten afspreken welke we zullen laten fungeren als de 'wortel uit -1'. Op het oog zou je zeggen: wat is er tegen om i te kiezen? Niet veel, behalve dat je van elk complex getal moet gaan aangeven wat de wortel is en dat je die keuzes natuurlijk consistent wilt doen. Dat blijkt lastiger dan je denkt. In het volgende hoofdstuk iets meer hierover.

3.15 *Verdere rekenregels voor complexe getallen*
Bij rekenen met complexe getallen blijven de (meeste) rekenregels die

je kent uit de wereld van de reële getallen van kracht. Zo geldt bijvoorbeeld voor elk tweetal complexe getallen z en w dat

$$wz = zw.$$

We zullen niet al deze regels hier noemen en bewijzen, maar ons beperken tot enkele voorbeelden.

(a) We bewijzen de net genoemde regel $wz = zw$. Veronderstel dat $w = a + bi$ en $z = c + di$ (met reële a, b, c, d). Dan is

$$wz = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

terwijl

$$zw = (ca - db) + i(cb + da)i.$$

Omdat $ac - bd = ca - db$ en $ad + bc = cb + da$ (het gaat hier om reële getallen!) vinden we dat $wz = zw$.

(b) Laten we aannemen dat we haakjes op de gebruikelijke manier uit een product van complexe getallen kunnen wegwerken.

Zoals voor reële getallen a en b geldt $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, zo geldt voor complexe getallen w en z: $(z + w)(z - w) = z^2 - w^2$. Kijk maar:

$$(z + w)(z - w) = z \cdot z - z \cdot w + w \cdot z - w \cdot w = z^2 - w^2,$$

waarbij we onderdeel (a) gebruikt hebben om $-zw$ en wz tegen elkaar weg te strepen.

Een voorbeeld: $(z + i)(z - i) = z^2 - i^2 = z^2 + 1$. Of:

$$(z + 4 + i)(z + 4 - i) = (z + 4)^2 - i^2 = (z + 4)^2 + 1 = z^2 + 8z + 17.$$

(c) Een flauw ogende regel is de volgende: als $zw = 0$ dan is $z = 0$ of $w = 0$. Veronderstel maar eens dat $zw = 0$. We willen laten zien dat $z = 0$ of $w = 0$. Als $z = 0$ zijn we meteen klaar, dus gaan we naar het geval dat $z \neq 0$. Vermenigvuldig in dat geval de gelijkheid $zw = 0$ aan beide zijden met z^{-1} en herleid:

$$zw = 0 \Rightarrow z^{-1} \cdot (zw) = z^{-1} \cdot 0 = 0 \Rightarrow (z^{-1}z) \cdot w = 0 \Rightarrow 1 \cdot w = 0 \Rightarrow w = 0.$$

Dus als $z \neq 0$, dan volgt $w = 0$. Kortom $z = 0$ of $w = 0$.

Andere regels zijn bijvoorbeeld:

$$z(u + v) = zu + zv, \quad \frac{1}{(z/u)} = \frac{u}{z}.$$

Zaken waarvoor je moet oppassen zijn bijvoorbeeld:

- Voor een complex getal z is het kwadraat niet per se positief. Bijvoorbeeld: $i^2 = -1$ is negatief en bij $(1+2i)^2 = -3+4i$ kunnen we niet eens over positief of negatief spreken. Je kunt bij complexe getallen in het algemeen ook niet spreken over 'groter dan' of 'kleiner dan'. Je kunt wel weer de reële delen vergelijken of de imaginaire delen of de afstand tot 0. Meer hierover in Opgave 10.
- Het reële deel en het imaginaire deel van een complex getal zijn zelf reële getallen.

3.16 *Rekenregels voor reële en imaginaire deel*
Nu we complexe getallen kunnen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, bekijken we verbanden met reële deel en imaginaire deel van complexe getallen. Voor het reële en het imaginaire deel geldt:

$$\mathrm{Re}(z + w) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w), \;\; \mathrm{Im}(z + w) = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w).$$

De eigenschap voor het reële deel kunnen we gemakkelijk natrekken door z en w uit te schrijven. Als $z = x + iy$ en $w = u + iv$ (met x, y, u, v reëel), dan is

$$\mathrm{Re}(z + w) = \mathrm{Re}(x + u + i(y + v)) = x + u.$$

Anderzijds is $\mathrm{Re}(z) = x$ en $\mathrm{Re}(w) = u$ zodat $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w) = x + u$.

1 **Opgave** Geef zelf de afleiding voor de rekenregel $\mathrm{Im}(z + w) = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w)$. Gelden de volgende regels:

$$\mathrm{Re}(z - w) = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(w), \;\; \mathrm{Im}(z - w) = \mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(w)?$$

Laat aan de hand van een concreet voorbeeld zien dat $\mathrm{Re}(zw)$ en $\mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(w)$ verschillend kunnen zijn.

3.17 *De complex geconjugeerde*
Bij delen door een complex getal $z = a + bi$ hebben we een nuttige rol voor het getal $a - bi$ gezien. We noemen dit getal de *complex geconjugeerde* van z. We geven dit met een streepje boven het complexe getal aan:

$$\bar{z} = a - bi.$$

De complex geconjugeerde van $2 + 3i$ is dus $2 - 3i$ en we schrijven: $\overline{2 + 3i} = 2 - 3i$. De complex geconjugeerde van $3 - 4i$ is $\overline{3 - 4i} = 3 + 4i$. Als we de complex geconjugeerde $\bar{z}$ van een complex getal z weer complex conjugeren zijn we natuurlijk weer terug bij z, ofwel

$$\bar{\bar{z}} = z.$$

De (notatie voor de) complex geconjugeerde blijkt in sommige berekeningen handig te zijn, maar de complex geconjugeerde heeft ook een meetkundige betekenis waar we op terugkomen als we het complexe vlak bespreken.

Twee belangrijke rekenregels voor de complex geconjugeerde in verband met optellen en vermenigvuldigen luiden:

a)
$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \quad \text{voor alle complexe getallen} \quad z, w.$$

In woorden: de complex geconjugeerde van de som van twee complexe getallen z en w is gelijk aan de som van de complex geconjugeerden van de getallen z en w afzonderlijk. Om in te zien waarom deze regel geldt, schrijf je z en w uit met reële en imaginaire deel: $z = a + bi$ en $w = u + vi$. Dan is $\overline{z} = a - bi$, $\overline{w} = u - vi$. Optellen levert $\overline{z} + \overline{w} = (a - bi) + (u - vi) = a + u - i(b + v)$.

Anderzijds is $z + w = (a + bi) + (u + vi) = a + u + i(b + v)$ zodat $\overline{z+w} = a + u - i(b + v)$. En dit getal is hetzelfde als $\overline{z} + \overline{w}$.

b)
$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \quad \text{voor alle complexe getallen} \quad z, w.$$

In woorden: de complex geconjugeerde van het product van twee complexe getallen z en w is gelijk aan het product van de complex geconjugeerden van de getallen z en w afzonderlijk. Het bewijs is ook een kwestie van uitschrijven met reële en imaginaire delen.

2 Opgave Leid uit de gelijkheid $\frac{1}{z} \cdot z = 1$ en de net genoemde rekenregel voor het product af dat geldt $\overline{(1/z)} = 1/\overline{z}$. Leid ook af:

a) $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$.

b) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

3.18 *Vergelijkingen oplossen: eerste indruk*

Met complexe getallen tot onze beschikking kunnen we niet zo gemakkelijk meer zeggen dat een vergelijking geen oplossingen heeft. Kijk maar eens naar de volgende kwadratische vergelijking:

$$z^2 + 8z + 25 = 0.$$

Om te beginnen splitsen we een kwadraat af:

$$z^2 + 8z + 25 = (z^2 + 8z + 16) + (25 - 16) = (z + 4)^2 + 9.$$

Nu is

$$(z + 4)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (z + 4)^2 = -9 \Leftrightarrow (z + 4)^2 = (3i)^2.$$

Dus

$$(z + 4 + 3i)(z + 4 - 3i) = 0$$

(welk merkwaardig product zit er achter deze stap?). Hieruit halen we dat $z + 4 + 3i = 0$ of $z + 4 - 3i = 0$ en dus vinden we de twee oplossingen

$$-4 + 3i \text{ en } -4 - 3i.$$

Twee ingrediënten zijn dus van belang:

(a) Kwadraat afsplitsen: een uitdrukking als $z^2 + az$ omvormen tot $(z + a/2)^2 - a^2/4$.

(b) Een getal kunnen schrijven als een kwadraat, bijvoorbeeld $-9 = (3i)^2$. In het algemeen kan deze stap wel eens lastiger zijn. Het is onwaarschijnlijk dat je bijvoorbeeld zo op het oog ziet van welk getal $2i$ het kwadraat is (dat blijkt onder meer $1 + i$ te zijn). Met de middelen uit het volgende hoofdstuk kun je het zoeken naar 'wortels' systematiseren.

Opgaven bij hoofdstuk 3

3 Herschrijf in de vorm $a + bi$ met a en b reëel.

a) $(3 + 2i) + (5 - 4i)$

b) $(a - 2i) - (a + 1 + 5i)$, met a reëel

c) $(4 - 3i) + (6 + 5i)$

d) $(3 + (7 - r)i) - (2 - 4ri)$ waarbij r een reëel getal is.

4 Herschrijf in de vorm $a + bi$ met a en b reëel.

a) $(2 + 3i)(7 - 6i)$

b) $\dfrac{1}{1 + i}$

c) $\dfrac{i}{(1 + i)(2 - i)}$

d) $\dfrac{1 + \frac{2+i}{1-i}}{2 + 3i}$

e) $(3 - 2i)(5 + 6i)$

f) $\dfrac{2 - i}{1 + 2i}$

g) $\dfrac{1}{(1 - i)^3}$

h) $\dfrac{(2 + i)(1 - \frac{1}{i})}{1 + i}$

5 Bepaal elk van de volgende reële of imaginaire delen.

a) $\mathrm{Re}(-2 + i)$.

b) $\mathrm{Im}(-1 - i\sqrt{2})$

c) $\mathrm{Re}((1 + i)^2)$

d) $\mathrm{Im}(i(1 + i))$

e) $\mathrm{Re}\left(\frac{2}{1-i}\right)$

f) $\mathrm{Im}\left(\frac{5i}{2+i}\right)$

6 a) Laat zien dat het complexe getal $1 + i$ een oplossing is van de vergelijking $z^4 = -4$.

b) Laat zien dat het complexe getal $1 + i\sqrt{3}$ een oplossing is van de vergelijking $z^3 = -8$.

7 Gebruik de definitie en de rekenregels voor de complex geconjugeerde bij de volgende vragen.

a) Als $z^2 = i$, waarom is dan $\bar{z}^2 = -i$?

b) Welke relatie bestaat er tussen $\mathrm{Re}(z)$ en $\mathrm{Im}(iz)$ voor een willekeurig complex getal z? [Hint: schrijf $z = a + bi$.]

c) Als $z^2 + 2z = -5$, waarom is dan $\bar{z}^2 + 2\bar{z} = -5$? waarom is $\bar{u}$ dan ook een oplossing? Als gegeven is dat $-1 + 2i$ een oplossing is, bepaal dan de andere oplossing zonder de vergelijking uit te werken.

8 Laat zien dat $(z^2 + zw + w^2)(z - w) = z^3 - w^3$ voor alle complexe getallen z en w. Geldt $(z^2 - zw + w^2)(z + w) = z^3 + w^3$ voor alle complexe getallen z en w?

9 Bepaal met behulp van kwadraatafsplitsen de twee oplossingen van elk van de volgende kwadratische vergelijkingen:

a) $z^2 - 4z + 5 = 0$

b) $z^2 + 6z + 10 = 0.$

10 *Voor complexe getallen hebben de begrippen 'positief' en 'negatief' geen zin*
Reële getallen zijn positief, negatief of gelijk aan 0: $a > 0$, $a < 0$ of $a = 0$. Helaas lukt het niet het begrip 'positief' op consistente wijze uit te breiden naar de complexe getallen. We raken in de knoop met de twee gebruikelijke regels: als $a > 0$ dan $-a < 0$ (en omgekeerd), en: als $a, b > 0$, dan ook $ab > 0$.

a) Stel dat $i > 0$. Pas de tweede regel toe op $a = i$ en $b = i$. Wat gebeurt er?

b) Laat zien dat $i < 0$ eveneens tot een tegenspraak leidt.

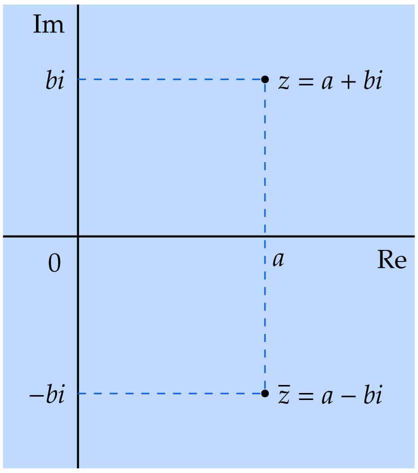
Hoofdstuk 4

Het complexe vlak

4.1 *De link met het platte vlak.*

Figuur 4.1 Het complexe vlak noemt men ook wel het vlak van Gauss naar Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855).

De reële getallen vullen precies de getallenlijn op (dit is een minder eenvoudig resultaat dan het misschien lijkt), maar de rationale getallen niet: er blijven nog (oneindig veel) gaten over. De uitbreidingsstap van rationale getallen naar reële getallen kun je je voorstellen als het verder opvullen van die gaten met getallen zoals $\sqrt{3}$, π, $\sqrt[7]{2+e}$ en dergelijke. De uitbreidingsstappen van natuurlijke naar gehele getallen, van gehele getallen naar rationale getallen, en tenslotte van rationale naar reële getallen kun je je allemaal voorstellen op de getallenlijn. Er blijkt ook een mogelijkheid te zijn om de uitbreidingsstap naar de complexe getallen meetkundig voor te stellen. Binnen de getallenlijn is geen plaats meer, dus een meetkundige voorstelling zal buiten deze getallenlijn gevonden moeten worden. De sleutel tot die meetkundige voorstelling ligt in het feit dat elk complex getal $a + bi$ als ingrediënten twee reële getallen heeft, het reële deel a en het imaginaire deel b. Bij elk paar (a, b) van reële getallen kunnen we het complexe getal $a + bi$ maken en, omgekeerd, bij elk complex getal $a + bi$ kunnen we denken aan het paar (a, b). Dus dringt zich haast vanzelf op om de complexe getallen als punten uit het platte vlak $\mathbb{R}^2$ te interpreteren. Et voila! Bij deze interpretatie van het platte vlak $\mathbb{R}^2$, spreken we van het *complexe vlak*. De complex geconjugeerde van een complex getal z laat zich in het



Figuur 4.2 Het complexe vlak: de plaats van het getal z en van de complex geconjugeerde $\overline{z}$.

complexe vlak ook gemakkelijk beschrijven: spiegel z (loodrecht) in de reële as en je vindt $\overline{z}$.

4.1 De polaire notatie voor complexe getallen

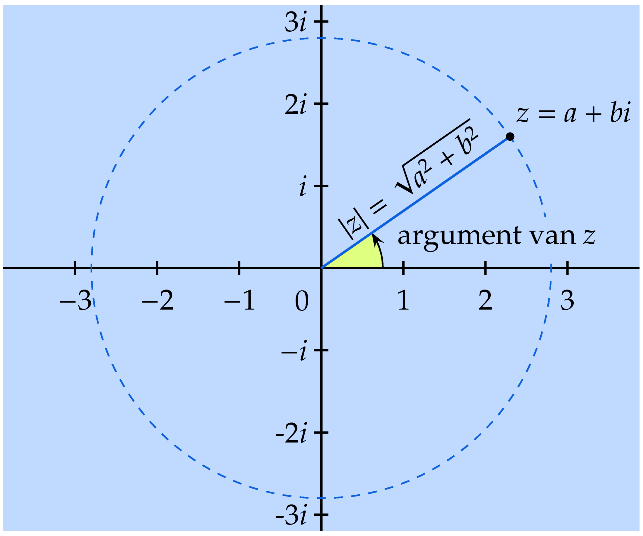
4.2 *Absolute waarde en argument van een complex getal*
Met de interpretatie van complexe getallen als punten uit het platte vlak, dient zich een tweede manier aan om onze getallen te beschrijven. Die tweede manier werken we hier verder uit. De ligging van het punt $z = a + bi$ uit het complexe vlak kun je namelijk ook als volgt beschrijven (zie Fig. 4.3).

(a) De afstand r tot 0, dat wil zeggen tot $0 + 0 \cdot i$: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, vanwege de stelling van Pythagoras. Dit getal heet de *modulus* of *absolute waarde* van z. Notatie: $|z|$. Dus $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

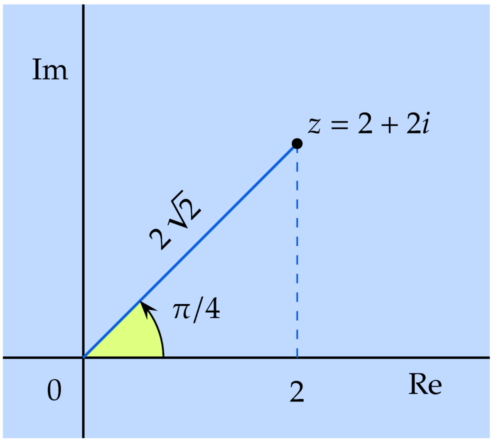
(b) (Alleen voor $z \neq 0$.) De hoek, zeg ϕ, die het lijnstuk van 0 naar $a + bi$ maakt met de positieve x– of reële as (gemeten tegen de klok in). Die hoek heet het *argument* van het getal z en is tot op veelvouden van 2π na bepaald; notatie: $\arg(z)$. In de regel proberen we de hoek te kiezen in $(-\pi, \pi]$ (we spreken dan wel van de *hoofdwaarde*), maar verplicht is het niet. Voor $z = 0$ is het argument niet gedefinieerd (maar de absolute waarde van 0 legt het getal 0 al vast).

De twee getallen r en ϕ die je op deze manier krijgt heten de *poolcoördinaten* van $a + bi$.

1 Opgave De complex geconjugeerde $\overline{z}$ is de gespiegelde van z in de reële as. Welk verband volgt hieruit tussen $|\overline{z}|$ en $|z|$, en tussen $\arg(\overline{z})$ en $\arg(z)$?



Figuur 4.3 Absolute waarde en argument van een complex getal.



Figuur 4.4 Absolute waarde en argument van $2 + 2i$.

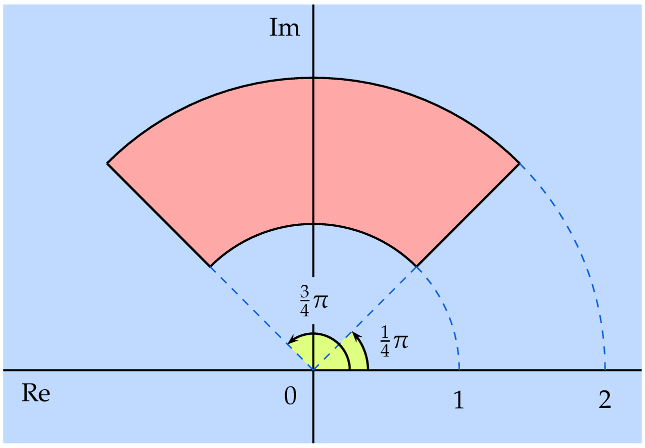
4.3 Voorbeeld Neem $z = 2 + 2i$. De absolute waarde van z is

$$\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}.$$

Het argument van z is gelijk aan $\pi/4$ ($9\pi/4$ of $-7\pi/4$ enz. mag ook): kijk maar in de driehoek met hoekpunten 0, 2 en $2+2i$ (Fig. 4.4). Die heeft een rechte hoek bij hoekpunt 2 en bovendien twee gelijke rechthoekszijden. De hoeken bij 0 en bij $2 + 2i$ zijn dus beide gelijk aan $\pi/4$. Elk van de getallen $\pi/4 + 2k\pi$ met k een geheel getal kunnen we als argument kiezen. Kiezen we $\pi/4$ even als argument, dan vinden we

$$|z| = \sqrt{8}, \quad \arg z = \pi/4.$$

2 Opgave Bepaal de afstand tussen de complexe getallen $2 + i$ en $5 + 5i$. Leg uit waarom de afstand tussen de complexe getallen $z = x + iy$ en $w = u + iv$ gelijk is aan $|z - w|$.



Figuur 4.5 Het gebied in het complexe vlak beschreven door $1 \leq |z| \leq 2$ en $\dfrac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \dfrac{3\pi}{4}$.

3 Opgave Bepaal absolute waarde en argument van $-2-2i$. Neem het argument in het interval tussen $-\pi$ en π. Misschien denk je dat je het argument ϕ van een complex getal $a+bi$ kunt bepalen uit $\tan\phi = b/a$. Laat aan de hand van het complexe getal $-2-2i$ zien dat dit niet juist is.

4.4 Voorbeeld De complexe getallen z waarvoor geldt $1 \leq |z| \leq 2$ en $\dfrac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \dfrac{3\pi}{4}$ zijn geschetst in bijgaande figuur.

4 Opgave Het complexe getal w met absolute waarde 3 en argument $2\pi/3$ ligt op een cirkel met middelpunt 0 en straal 3, en op de halfrechte vanuit 0 die een hoek van $2\pi/3$ radialen met de positieve reële as maakt. Teken het complexe getal met behulp van deze gegevens.

5 Opgave Schrijf het complexe getal z in de vorm $a+bi$ en ga na dat geldt:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2, \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

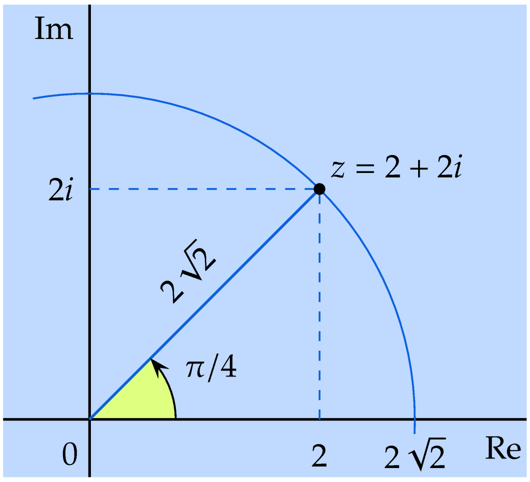
(waarbij $z \neq 0$ verondersteld is in de tweede gelijkheid). Bereken met behulp van de tweede gelijkheid het reële en het imaginaire deel van

$$\frac{1}{3+2i}.$$

4.5 *Van poolcoördinaten naar reële en imaginaire deel*
Ga even terug naar het voorbeeld van daarnet. Er geldt:

$$|z| = \sqrt{8}, \text{ en } \arg(z) = \frac{\pi}{4}.$$

Uit deze twee gegevens zijn het reële en imaginaire deel weer te reconstrueren.



Figuur 4.6 Absolute waarde en argument van z.

Om het reële deel te bepalen moeten we a in de driehoek bepalen, zie Fig. 4.6. Er geldt uiteraard:

$$a = \mathrm{Re}(z) = \sqrt{8} \cdot \cos(\pi/4).$$

Het imaginaire deel volgt op soortgelijke wijze:

$$\mathrm{Im}(z) = \sqrt{8} \cdot \sin(\pi/4).$$

Het getal z is dus ook $\sqrt{8}\,\cos(\pi/4) + i\,\sqrt{8}\,\sin(\pi/4)$, ofwel

$$\sqrt{8}\,(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)).$$

Voor de haken staat de absolute waarde. Binnen de haken staan een cosinus en een sinus van het argument. In het algemeen kunnen we op deze wijze het reële en imaginaire deel van een complex getal z bepalen met absolute waarde r en argument ϕ:

$$\mathrm{Re}(z) = r\cos\phi \text{ en } \mathrm{Im}(z) = r\sin\phi.$$

Het complexe getal z is dan te schrijven als $r\cos\phi + ir\sin\phi$, ofwel

$$r(\cos\phi + i\sin\phi).$$

In deze schrijfwijze herken je meteen de absolute waarde (voor de haken) en het argument (de hoek achter cosinus en sinus). We spreken wel van de *polaire notatie* van het complexe getal.

4.6 Voorbeeld Wat is de polaire notatie van het complexe getal z met absolute waarde 1 en argument $\pi/3$?

Uit bovenstaande theorie halen we:

$$z = 1 \cdot (\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3).$$

Het heeft wel eens voordelen een getal in deze vorm te laten staan en niet om te werken naar, in dit geval, $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6 Opgave Het complexe getal z heeft absolute waarde 2 en argument $3\pi/4$. Geef de polaire voorstelling van z.

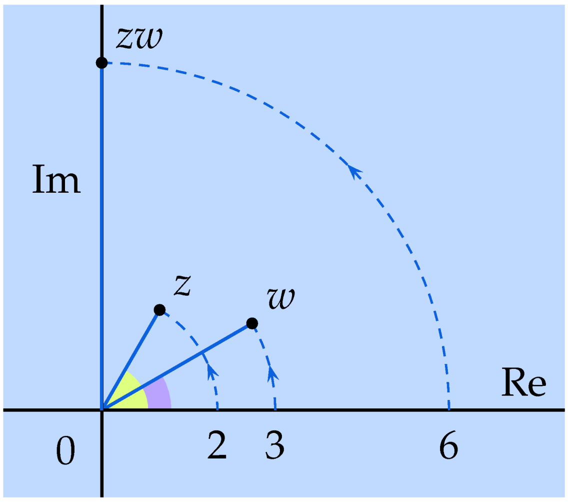
4.2 Vermenigvuldigen en de polaire notatie

Bij het werken met polaire notatie staan de absolute waarde en het argument van een complex getal centraal. Als je twee complexe getallen met elkaar vermenigvuldigt, dan blijken absolute waarde en argument van het product eenvoudig uit te drukken te zijn in die van de twee factoren.

4.7 *Vermenigvuldigen in termen van poolcoördinaten 1*
Poolcoördinaten komen voornamelijk van pas bij het vermenigvuldigen van complexe getallen (en dus ook bij machtsverheffen). Laten we dat eerst eens illustreren aan de hand van de vermenigvuldiging van de getallen z met $|z| = 2$ en $\arg(z) = \pi/3$, en w met $|w| = 3$ en $\arg(w) = \pi/6$. Dus

$$z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}), \text{ en } w = 3(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}).$$

(Zie Fig. 4.7.) Vermenigvuldigen levert (we werken met opzet niet alles



Figuur 4.7 Vermenigvuldigen van $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ en $w = 3(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$.

uit):

$$\begin{aligned}&2(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3})\cdot 3(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6}) =\\ &2\cdot 3[(\cos\tfrac{\pi}{3}\cos\tfrac{\pi}{6} - \sin\tfrac{\pi}{3}\sin\tfrac{\pi}{6}) + i(\sin\tfrac{\pi}{3}\cos\tfrac{\pi}{6} + \cos\tfrac{\pi}{3}\sin\tfrac{\pi}{6})] =\\ &2\cdot 3(\cos(\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\pi}{6}) + i\sin(\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\pi}{6})).\end{aligned}$$

Bij de laatste stap hebben we gebruik gemaakt van twee gonioformules (zie §10). Bekijk die laatste regel eens wat nader:

$$\overbrace{2\cdot 3}^{\text{product}}\,(\cos\overbrace{(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})}^{\text{som}} + i\sin\overbrace{(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})}^{\text{som}}).$$

Het complexe getal dat is ontstaan heeft blijkbaar als absolute waarde het *product* van de absolute waarden van z en van w, en als argument de *som* van de argumenten van z en van w. Natuurlijk kunnen we in dit concrete geval de absolute waarde en het argument ook afleiden door eerst het product volledig uit te werken tot $6i$.

Het fenomeen dat we hier zien verschijnen, geldt algemeen: als we twee complexe getallen z en w vermenigvuldigen, dan geldt voor het product zw:

(a) *De absolute waarde van zw is het product van de absolute waarden van z en van w.* In formule:

$$|zw| = |z| \cdot |w|.$$

Door herhaald toepassen volgt uit deze rekenregel ook bijvoorbeeld $|u \cdot v \cdot w| = |u| \cdot |v| \cdot |w|$ en $|z^n| = |z|^n$. Bijvoorbeeld: $|(1+i)^3| = |1+i|^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$.

(b) *Het argument van zw is de som van de argumenten van z en van w, waarbij je een geheel veelvoud $2k\pi$ van 2π mag afwijken.* In formule:

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) + 2k\pi$$

(met k een geheel getal). Herhaald toepassen levert bijvoorbeeld $\arg(uvw) = \arg(u) + \arg(v) + \arg(w) + 2k\pi$, en voor gehele exponenten n ook $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi$. Zo is bijvoorbeeld: $\arg((1-i)^2) = 2\arg(1-i) = 2 \cdot (-\pi/4) = -\pi/2$. Natuurlijk mag je hier weer een veelvoud van 2π van afwijken. (Misschien doet de rekenregel voor het argument je aan de logaritme denken. Inderdaad blijken argument en logaritme familie van elkaar te zijn.)

4.8 Voorbeeld Start met het getal $z = 3 + 3i$ (zie Fig. 4.8). Dit getal heeft absolute waarde $3\sqrt{2}$ en argument $\pi/4$. Laat verder u het getal zijn met absolute waarde 1 en argument $\pi/3$, dus

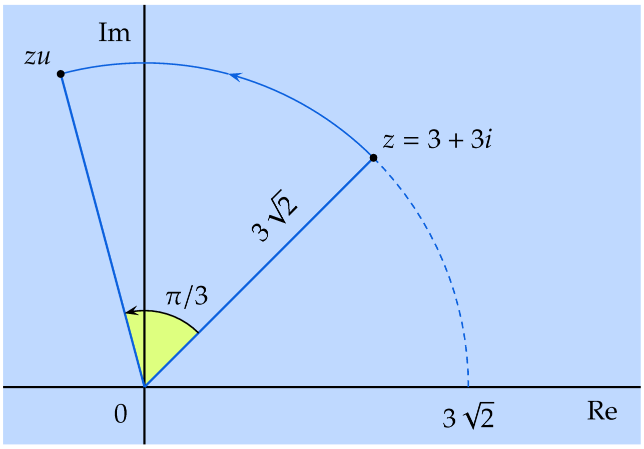
$$u = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) \text{ of } u = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Als we z vermenigvuldigen met u krijgen we een complex getal waarvan de absolute waarde gelijk is aan

$$|zu| = |z| \cdot |u| = 3\sqrt{2} \cdot 1 = 3\sqrt{2}$$

(het is hiervoor dus niet nodig het product eerst uit te rekenen!). Het getal zu heeft dus dezelfde absolute waarde als z. Het argument van zu voldoet aan

$$\arg(zu) = \arg(z) + \arg(u) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$$



Figuur 4.8
Vermenigvuldigen van $3+3i$ met $u = \cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)$: rotatie over $\pi/3$.

(ook hier is het niet nodig het product zu uit te rekenen). Het argument van zu is dus, in vergelijking met het argument van z, met $\pi/3$ toegenomen. Samengevat kunnen we zeggen dat de vermenigvuldiging met u het getal z geroteerd heeft over $\pi/3$ radialen (of 60 graden) tegen de wijzers van de klok in.

Wat zou er trouwens meetkundig gebeuren als je zu nog eens met u vermenigvuldigt? Wat is het resultaat van vermenigvuldigen met u^2?

7 Opgave Kun je met behulp van de gelijkheid $(1/z)\cdot z = 1$ een rekenregel bedenken (en afleiden) voor de abolute waarde van $1/z$? Laat verder zien dat

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}\,.$$

Hoe zou je dit in woorden zeggen?

4.9 *Vermenigvuldigen met poolcoördinaten 2:* machtsverheffen
Een speciaal geval van het vermenigvuldigen met poolcoördinaten treedt op bij machtsverheffen. Als we van z de absolute waarde (zeg r) en het argument (zeg ϕ) kennen, dan geldt:

(a) De absolute waarde van z^2 is r^2. Het argument van z^2 is 2ϕ.

(b) Door herhaling vind je: de absolute waarde van z^n is r^n en het argument van z^n is $n\phi$.

Dus als $z = 1 + i\sqrt{3}$, dan heeft z absolute waarde $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ en argument $\pi/3$ (maak een plaatje). De polaire voorstelling van z is dus $z = 2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))$. De vierde macht van z heeft dus absolute waarde $2^4 = 16$ en argument $4\pi/3$. Kortom

$$z^4 = 16(\cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3)).$$

Als dat zo uitkomt kunnen we verder uitwerken: omdat $\cos(4\pi/3) = -1/2$ en $\sin(4\pi/3) = -\sqrt{3}/2$ krijgen we

$$z^4 = -8 - 8i\sqrt{3}.$$

Deze wijze van machtsverheffen via poolcoördinaten is vaak eenvoudiger dan machtsverheffen door bijvoorbeeld $(1 + i\sqrt{3})^4$ uit te werken, zeker als het over een flink grote macht gaat, zoals $(1 + i\sqrt{3})^{100}$.

8 **Opgave** Het kwadraat van een complex getal z heeft argument $\pi/2$. Er zijn dan twee mogelijkheden voor (de hoofdwaarde van) het argument van z? Welke? Als de absolute waarde van z^2 gelijk is aan 16, welke mogelijkheden zijn er dan voor $|z|$?

4.3 Vergelijkingen oplossen

4.10 In deze paragraaf laten we zien hoe we met behulp van complexe getallen enkele typen vergelijkingen kunnen aanpakken.

4.11 *De vergelijking $z^n = a$*
Poolcoördinaten zijn uitermate geschikt om vergelijkingen van het type $z^n = a$ aan te pakken. We illustreren dat aan de hand van de vergelijking

$$z^4 = 3.$$

In plaats van de mogelijke reële en imaginaire delen van z op te sporen, gaan we op zoek naar de mogelijke absolute waarden en argumenten van z. (Je moet maar eens kijken in wat voor moeilijkheden je komt als je probeert z te vervangen door $a + bi$ en dan $(a + bi)^4$ uit te werken.)

- *Analyse van de absolute waarden*. We analyseren eerst de absolute waarde van het linkerlid en van het rechterlid:

  $$z^4 = 3 \Rightarrow |z^4| = |3| \Rightarrow |z|^4 = 3$$

  (natuurlijk is $|3| = 3$; verder gebruiken we $|z^4| = |z \cdot z \cdot z \cdot z| = |z| \cdot |z| \cdot |z| \cdot |z| = |z|^4$). Omdat absolute waarden altijd niet–negatieve reële getallen zijn, concluderen we $|z| = \sqrt[4]{3}$. (Voor alle duidelijkheid: hier is bedoeld de reële 4e machtswortel uit 3, een positief reëel getal.)

- *Analyse van de argumenten*. Het argument van het linkerlid moet gelijk zijn aan het argument van het rechterlid of er een veelvoud van 2π van verschillen. Omdat $\arg(z^4) = 4\arg(z)(+2k\pi)$ en het argument van het rechterlid gelijk is aan 0 op een veelvoud van 2π na, concluderen we:

  $$4\arg(z) = 0 + 2\ell\pi \text{ (met } \ell \text{ geheel).}$$

Dus $\arg(z) = \ldots, -\pi/2, 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi, \ldots$ Maar argumenten die een veelvoud van 2π verschillen leiden tot hetzelfde complexe getal. We hoeven daarom alleen maar de argumenten $0, \pi/2, \pi$ en $3\pi/2$ verder te bekijken.

We vinden dus vier oplossingen:

$$\sqrt[4]{3}\,(\cos(0) + i\sin(0)),\quad \sqrt[4]{3}\,(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})),$$

$$\sqrt[4]{3}\,(\cos(\pi) + i\sin(\pi)),\quad \sqrt[4]{3}\,(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})).$$

Of, als we er minder prijs op stellen om de absolute waarde en het argument zo duidelijk te zien:

$$\sqrt[4]{3},\ i\sqrt[4]{3},\ -\sqrt[4]{3},\ -i\sqrt[4]{3}.$$

Zoals je ziet zijn er dus vier mogelijkheden om in $\mathbb{C}$ de vierdemachtswortel uit 3 te definiëren. In dit geval heb je misschien een voorkeur voor de reële positieve wortel, maar bij bijvoorbeeld $\sqrt[4]{1+i}$ is die keuze niet zo gemakkelijk.

In het algemeen kun je op deze manier de vergelijking $z^n = a$ aanpakken. Als n positief geheel is en $a \neq 0$ blijk je n verschillende oplossingen te vinden.

4.12 *Over wortels en de abc-formule*
Nu we de vergelijkingen van het type $z^n = a$ aankunnen, is het een geschikt moment om in te gaan op wortels. Eerst maar eens de wortel uit een complex getal.

De wortel uit $-1 + i\sqrt{3}$ zou natuurlijk een getal moeten zijn waarvan het kwadraat gelijk is aan $-1 + i\sqrt{3}$. Dat betekent dat we eerst naar de vergelijking

$$z^2 = -1 + i\sqrt{3}$$

gaan kijken. Deze blijkt twee oplossingen te hebben. Deze oplossingen bepaal je bijvoorbeeld door absolute waarde en argument van linker- en rechterlid te vergelijken:

$$|z^2| = |-1 + i\sqrt{3}| = 2 \quad \text{en} \quad \arg z^2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

Hieruit haal je dat beide oplossingen absolute waarde $\sqrt{2}$ hebben, maar dat de ene oplossing argument $\pi/3$ heeft en de andere argument $4\pi/3$. De oplossingen zijn dus

$$\sqrt{2}(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)) \quad \text{en} \quad \sqrt{2}(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right))$$

In de regel noemt men de oplossing waarvan het argument verkregen is als de helft van de hoofdwaarde van het oorspronkelijke argument (dus het argument gekozen in $(-\pi, \pi]$) de wortel uit het betreffende getal. In ons geval:

$$\sqrt{z} = \sqrt{2}(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)).$$

Algemener: als z een oplossing is van $z^n = a$ (met n een positief geheel getal en $a \neq 0$) en $\arg a \in (-\pi, \pi]$, dan noemt men de oplossing waarvan het argument gelijk is aan $\arg(z)/n$ wel de n-de machts wortel uit a. Deze oplossing heeft als absolute waarde de reële n–machtswortel uit $|a|$, dat wil zeggen $\sqrt[n]{|a|}$ en als argument $\arg(a)/n$.

Volgens deze afspraak is $\sqrt{-4} = 2i$ (en niet $-2i$), omdat het argument van -4 gelijk is aan π en het argument van $2i$ hiervan de helft is.

Met deze afspraken over wortels is eventueel ook de wortelformule voor kwadratische vergelijkingen te gebruiken. Bijvoorbeeld, voor $z^2 + 2z + 2 = 0$ leidt dit tot:

$$\frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i.$$

Hierbij is $\sqrt{-4}$ vervangen door $2i$, volgens de boven aangegeven afspraak.

We zullen hier verder niet ingaan op het juiste gebruik van wortels. Het is wel belangrijk te weten dat de vergelijking $z^n = a$ met $a \neq 0$ en n positief geheel precies n verschillende oplossingen heeft.

9 **Opgave** Bepaal met behulp van bovenstaande afspraken $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-4}$ en $\sqrt{16}$. Dus als je een gelijkheid verwacht had... Wat is $\sqrt{2i}$ volgens onze afspraak over wortels?

4.13 *Polynoomvergelijkingen*

De vergelijkingen $2z^2 - 5iz + 3 = 0$ en $(1+i)z - 4 = 8$ zijn voorbeelden van polynoomvergelijkingen, de eerste van graad 2 (ook wel kwadratische vergelijking genoemd), de tweede van graad 1. Een polynoomvergelijking van graad $n > 0$ (n een geheel getal) is een vergelijking van de vorm

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0,$$

waarin $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de (complexe) coëfficiënten zijn van de vergelijking. Hierbij veronderstellen we dat $a_n \neq 0$ om met recht van een vergelijking van graad n te kunnen spreken. Het complexe getal z_0 heet een *oplossing* van de polynoomvergelijking als

$$a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_2 z_0^2 + a_1 z_0 + a_0 = 0.$$

Men noemt z_0 ook wel een *wortel* van de vergelijking of een *nulpunt* van het polynoom $a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_2 z_0^2 + a_1 z_0 + a_0$. Zo is bijvoorbeeld

$1 + i$ een nulpunt van het polynoom $z^2 - 2i$, maar ook van $z^4 + 4$. Reken maar na.

10 **Opgave** Soms moet je wat manipulaties uitvoeren om de standaardgedaante van een polynoomvergelijking te herkennen. Herleid de volgende vergelijkingen tot de standaardgedaante van een polynoomvergelijking. Zijn de gevonden polynoomvergelijkingen gelijkwaardig met de hieronder genoemde?

a) $(z + 1)^2 - (z - 1)^2 = 6$.

b) $z^2 - 3z + 2/z = 0$.

c) $\dfrac{z + 1}{z^2 + 1} = 8$.

4.14 *Kwadratische vergelijkingen*
Een kwadratische vergelijking heeft de vorm

$$az^2 + bz + c = 0$$

(met $a \neq 0$). De coëfficiënten a, b, c zijn hierin complexe getallen. Als $b = 0$, dan kun je zo'n vergelijking oplossen met de eerder besproken technieken (de vergelijking is van de vorm $z^2 = d$ met $d = -c/a$).

Als de term bz niet ontbreekt, kun je door 'kwadraat afsplitsen' (zie ook paragraaf 10) de vergelijking ook met die techniek aanpakken. Kijk maar eens naar de vergelijking $z^2 + 2iz + 8 = 0$. Omdat $(z+i)^2 = z^2 + 2iz - 1$ kunnen we de vergelijking ook schrijven als

$$(z + i)^2 + 9 = 0.$$

We lossen nu eerst de vergelijking $w^2 = -9$ op. Dat levert voor w twee mogelijkheden: $3i$ en $-3i$. Voor z vinden we dan ook twee mogelijkheden:

a) $z + i = 3i$. In dit geval vinden we $z = 2i$.

b) $z + i = -3i$. In dit geval vinden we $z = -4i$.

De kwadratische vergelijking $z^2 + 2iz + 8 = 0$ heeft dus $2i$ en $-4i$ als oplossingen.

Met behulp van de *abc*-formule en het feit dat $\sqrt{-36} = 6i$:

$$\frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{-2i \pm \sqrt{-36}}{2} = -i \pm 3i.$$

De twee oplossingen zijn dus: $-4i$ en $2i$.

11 **Opgave** Splits een kwadraat af bij $z^2 + (2 + 2i)z + 8i$. Hoe zou je $z^4 + (4 + 2i)z^2 + 8i$ aanpakken? En $2z^2 + (4 + 4i)z + 8i$?

4.15 *Over de abc-formule*
De *abc*-formule hebben we niet afgeleid voor complexe vergelijkingen en die verplichting hebben we wel als we de formule in deze context willen toepassen. Vandaar dat we hier een afleiding schetsen. De voornaamste stap is het afsplitsen van een kwadraat. We bekijken eerst het geval $z^2+bz+c=0$ (dus het geval waarin $a=1$). Splits een kwadraat af:

$$z^2+bz+c=(z+\frac{b}{2})^2+c-\frac{b^2}{4}=(z+\frac{b}{2})^2-\frac{b^2-4c}{4}=(z+\frac{b}{2})^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4c}}{2}\right)^2.$$

(Hier staat dus mogelijk de wortel uit een complex getal.) We herschrijven dit verschil van kwadraten als

$$(z+\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{b^2-4c}}{2})(z+\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{b^2-4c}}{2})$$

en concluderen dat $z^2+bz+c=0$ de twee oplossingen

$$-\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{b^2-4c}}{2} \quad \text{en} \quad -\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

heeft. Het algemene geval $az^2+bz+c=0$ kun je herleiden tot dit speciale geval door te delen door a. We laten die stappen hier achterwege. Zie ook Opgave 22.

4.16 *De Hoofdstelling van de Algebra*
De vergelijking $x^2+2x+2=0$ heeft geen reële oplossingen, maar wel complexe oplossingen (welke?). Je kunt je afvragen of er ook polynoomvergelijkingen zijn die geen complexe nulpunten hebben. Dat blijkt niet het geval te zijn (afgezien van flauwe nuldegraads vergelijkingen zoals $0\cdot z+3=0$). De *Hoofdstelling van de algebra* zegt dat er bij elk polynoom $a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ van graad n complexe getallen $z_1,z_2,\ldots,z_n$ zijn zodat

$$a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=a_n(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$$

(de getallen $z_1,z_2,\ldots,z_n$ hoeven overigens niet verschillend te zijn). In het bijzonder zijn $z_1,z_2,\ldots,z_n$ de oplossingen van de polynoomvergelijking $a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$. Zo is bijvoorbeeld

$$z^3-6z-40=(z-4)(z+2+i\sqrt{6})(z+2-i\sqrt{6}).$$

Helaas zegt de Hoofdstelling niet hoe je de nulpunten vindt; de stelling zegt alleen maar dat ze er zijn. Een subtiel maar belangrijk verschil!

4.17 *Uitdelen van factoren*
Als je op een of andere wijze een oplossing van een polynoomvergelijking van graad n te pakken hebt, dan kun je het probleem van het

vinden van oplossingen reduceren tot het oplossen van een polynoomvergelijking van graad $n-1$. Hier is een voorbeeld. Laten we zeggen dat je hebt uitgevonden dat 4 een oplossing is van $z^3-6z-40=0$. Door een deling uit te voeren kun je uitvinden dat

$$z^3-6z-40=(z-4)(z^2+4z+10).$$

Je hoeft vervolgens alleen maar de kwadratische vergelijking $z^2+4z+10=0$ op te lossen, en dat is eenvoudiger (de oplossingen zijn $-2+i\sqrt{6}$ en $-2-i\sqrt{6}$). Er zijn verschillende manieren om $z^3-6z-40$ te delen door $z-4$. Een ervan is het uitvoeren van een *staartdeling*:

$$\begin{array}{lllllll}
z-4 & / & z^3+0z^2 & -6z-40 & & \backslash & z^2+4z+10 \\
 & & z^3-4z^2 & & & & \\
 & & \quad\;\; 4z^2 & -16z & & & \\
 & & & \quad 10z-40 & & & \\
 & & & \qquad\quad\;\; 0 & & &
\end{array}$$

Op grond hiervan concludeer je dat $z^3-6z-40=(z-4)(z^2+4z+10)$. Vervolgens los je $z^2+4z+10=0$ op.

Opgaven bij hoofdstuk 4

12 Schrijf de volgende getallen in de vorm $r(\cos\phi + i\sin\phi)$, waarbij $r > 0$ en $-\pi < \phi \leq \pi$. Teken de punten ook in het complexe vlak.

(a) $1 + i$
(b) $4 - 4i$
(c) $\sqrt{3} + i$
(d) $5i$
(e) -2
(f) $-1 + i$,
(g) $-1 - i\sqrt{3}$
(h) $-7i$

13 Schets in het complexe vlak de getallen z die voldoen aan:

a) $|z| = 4$
b) $|z - 4| = |z|$
c) $\dfrac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \dfrac{\pi}{2}$
d) $|z - 2| = 3$
e) $|z - 2| = |z - 2i|$
f) $0 < \arg \dfrac{1}{z} \leq \dfrac{\pi}{2}$

14 Bereken $(1 + i\sqrt{3})^{1000}$ via poolcoördinaten.

15 Los de volgende vergelijkingen op door absolute waarde en argument te analyseren. Teken de gevonden oplossingen.

(a) $z^2 = 2i$
(b) $z^3 = i$
(c) $z^4 = -2$
(d) $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$
(e) $z^2 = -2i$
(f) $z^3 = -8i$
(g) $z^4 = 16$
(h) $(z + i)^3 = i$

16 Los de volgende vergelijkingen op.

(a) $z^2 + 2z + 2 = 0$
b) $z^2 - 2iz + 2 = 0$
c) $z + \dfrac{1}{z} = i$
d) $z^2 + 6z + 9 - 2i = 0$
e) $z^2 - 4z + 4 + 2i = 0$
f) $(z - 2i)^2 + 2(z - 2i) + 2 = 0$

17 Begin met een complex getal $z \neq 0$ (het doet er niet toe welk).

(a) Beschrijf meetkundig hoe je het getal iz uit z krijgt. Teken z, iz, i^2z, i^3z, enz. Wat voor patroon zie je?

(b) Bepaal het complexe getal dat argument $2\pi/3$ heeft en absolute waarde 1. Hoe kun je een gelijkzijdige driehoek maken waarvan 1 en z hoekpunten zijn?

(c) Wat heeft het getal
$$\cos(2\pi/n) + i\,\sin(2\pi/n)$$
te maken met een regelmatige n–hoek?

18 Gegeven het complexe getal $\rho = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6)$.

(a) Bepaal de absolute waarde en het argument van ρ.

(b) Als je een complex getal $z \neq 0$ met ρ vermenigvuldigt, wat is dan de onderlinge ligging van $z\rho$ en z?

(c) Teken de getallen $1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^6$. Laat aan de hand van de figuur zien dat $1 + \rho^2 = \rho$. Verifieer ook algebraïsch dat $1 - \rho + \rho^2 = 0$.

19 Het complexe getal u heeft absolute waarde 1 en argument $2\pi/3$.

(a) Laat zien dat $u = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Waarom zijn 1, u en u^2 drie verschillende getallen? Waarom is $u^3 = 1$? Bepaal $(u^2)^3$.

(b) In Hoofdstuk 2 werd een derde-machtswortel uit $65 + 142i$ vermeld, te weten $5 + 2i$. Laat met je huidige kennis van de complexe getallen zien dat de derde machten van $u(5 + 2i)$ en $u^2(5 + 2i)$ ook gelijk zijn aan $65 + 142i$.

In het algemeen leveren formules met worteltekens erin problemen op met betrekking tot de keuze van wortels.

20 Het complexe getal z heeft absolute waarde 1 en argument α.

(a) Beschrijf dit getal in poolcoördinaten.

(b) Waarom is het kwadraat van dit getal gelijk aan $\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha)$? [Hint: wat gebeurt er met argument en absolute waarde bij kwadrateren?]

(c) Kwadrateer de uitdrukking uit (a) en werk uit. Laat zien dat je m.b.v. (b) de gonioformule $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ krijgt. Welke andere gonioformule vind je ook?

21 *Derdegraads vergelijkingen*

a) De vergelijking $z^3 - 11z + 20 = 0$ heeft een oplossing $z = -4$. Bepaal de andere oplossingen van de vergelijking.

b) De vergelijking $z^3 - 9z + 10 = 0$ heeft een oplossing $z = 2$. Bepaal de andere oplossingen.

De vergelijking $z^3 - 6z - 40 = 0$ heeft oplossingen 4, $-2 + i\sqrt{6}$, $-2 - i\sqrt{6}$. Als je deze oplossingen via de formule van Cardano probeert te achterhalen, ontdek je al gauw diverse complicaties. Bekijk

$$\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$$

maar. Als je onze definitie van wortel en derdemachts wortel hanteert, dan zou er maar één oplossing zijn, en dat is te weinig. Als je bij elk van de derdemachts wortels alle drie de mogelijkheden toelaat, dan vind je $3 \cdot 3 = 9$ mogelijkheden en dat is weer te veel.

c) Reconstrueer deze oplossingen met behulp van Cardano door middel van de uitdrukkingen $(2+\sqrt{2})u+(2-\sqrt{2})u^{-1}$ waarbij u elk van de oplossingen van $w^3=1$ doorloopt. Gebruik in de eerste stap dat $20+\sqrt{392}=(2+\sqrt{2})^3$ en dat $20-\sqrt{392}=(2-\sqrt{2})^3$.

Kortom, gebruik van de formule van Cardano vergt nadere analyse die we hier achterwege zullen laten.

22 Leid de *abc*-formule als volgt af:

a) Vermenigvuldig $az^2+bz+c=0$ links en rechts met a (we veronderstellen uiteraard dat $a\neq 0$). Herschrijf $a^2z^2=(az)^2$ en splits een kwadraat af.

b) Leid met behulp van het vorige onderdeel de *abc*-formule af.

Hoofdstuk 5

De complexe e-macht

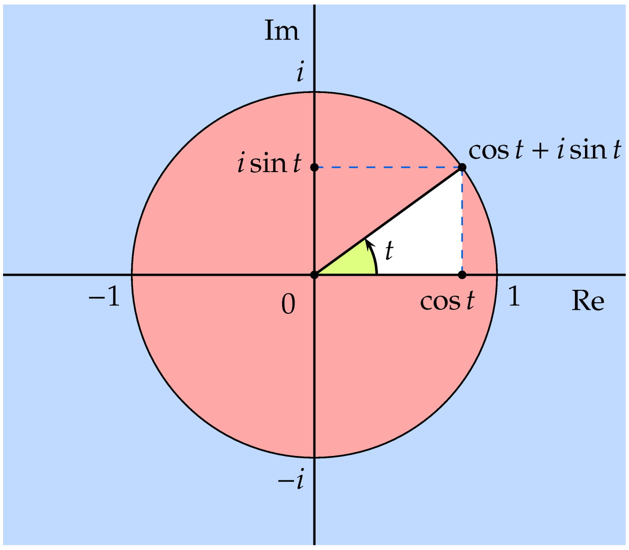
5.1 Inleiding en definitie

5.1 Bij functies van een reële variabele speelt de exponentiële functie een belangrijke rol. Denk maar aan het beschrijven van groeiprocessen.

Je blijkt ook voor complexe getallen z een e-macht e^z (zelf weer een complex getal) te kunnen definiëren met eigenschappen die gedeeltelijk vergelijkbaar zijn met die van de reële e-macht. De complexe e-macht heeft veel met goniometrische functies en poolcoördinaten te maken, maakt allerlei berekeningen doorzichtiger en blijkt in de wereld van de complexe getallen een centrale rol te spelen.

In deze paragraaf richten we ons op de e-macht e^{it} waarbij t een reëel getal is. De algemene complexe e-macht e^z (voor een willekeurig complex getal z) stippen we kort aan.

5.2 *De eenheidscirkel beschreven met behulp van* $\cos t + i \sin t$
Voor elke reële waarde van t beschrijft $\cos t + i \sin t$ een punt in het complexe vlak. De absolute waarde van elk van deze getallen is gelijk



Figuur 5.1 Elk punt op de eenheidscirkel kun je beschrijven met een complex getal van de vorm $\cos t + i \sin t$ waarbij t het argument van het complexe getal is.

aan 1 omdat

$$|\cos t + i \sin t| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$$

(dus elk punt ligt op een cirkel met middelpunt 0 en straal 1), terwijl het argument van $\cos t + i \sin t$ gelijk is aan t. Als t het interval van 0 tot 2π doorloopt, dan doorloopt $\cos t + i \sin t$ dus een cirkel met straal 1 (tegen de wijzers van de klok in). Deze beschrijving is de vertaling in complexe getallen van de bekende parametervoorstelling $f(t) = (\cos t, \sin t)$ van de eenheidscirkel.

1 Opgave Hoe kun je op soortgelijke wijze een cirkel met middelpunt $1 + i$ en straal 2 beschrijven?

5.3 *De complexe e-macht e^{it}*

De uitdrukking $\cos t + i \sin t$ heeft een eigenschap gemeen met de reële exponentiële functie. Dat is een van de redenen om de complexe e-macht te definiëren zoals we hieronder zullen doen. Om dat verband op het spoor te komen, doen we net of we deze uitdrukking kunnen differentiëren op de gebruikelijke manier (waarbij je i als een gewone constante behandelt). Dan vind je $-\sin t + i \cos t$ en dat is gelijk aan $i(\cos t + i \sin t)$. Met andere woorden:

de afgeleide is gelijk aan een constante maal de uitdrukking zelf.

Nu heeft de 'gewone' functie $f(x) = e^{ax}$ een vergelijkbare eigenschap: $f'(x) = a\,e^{ax} = a\,f(x)$.

Deze analogie suggereert om, voor reële t, de e-macht e^{it} te *definiëren* als $\cos t + i \sin t$.

Er zijn ook andere manieren om de complexe e-macht op het spoor te komen, bijvoorbeeld via zogeheten machtreeksen, maar we gaan daar hier niet op in.

Definitie. Voor een complex getal it (met t reëel) is e^{it} per definitie het complexe getal $\cos t + i \sin t$, dus

$$e^{it} := \cos t + i \sin t.$$

Aan deze definitie kun je niet eenvoudig zien wat hier nu zo nuttig aan is. Het nut zal moeten blijken. Het kost wel even tijd om te wennen aan deze definitie. Laten we eerst eens enkele voorbeelden bekijken. De gelijkheid $e^{it} = \cos t + i \sin t$ wordt ook wel *formule van Euler* genoemd, naar de wiskundige Leonhard Euler (1707-1783). Eulers manier om de e-macht te introduceren wijkt overigens af van de onze.

5.4 Voorbeelden a) Voor het complexe getal $\dfrac{i\pi}{4}$ vinden we:

$$e^{i\pi/4} = \cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{i}{2}\sqrt{2}.$$

b) Wegens $\cos\pi = -1$ en $\sin\pi = 0$ vinden we

$$e^{\pi i} = -1,$$

een beroemde gelijkheid die wel naar Euler genoemd wordt.

c) Uit de definitie van de e-macht en de eigenschappen van cosinus en sinus volgt:

$$e^{-it} = \cos(-t) + i\sin(-t) = \cos t - i\sin t = \overline{\cos t + i\sin t} = \overline{e^{it}}.$$

In het bijzonder geldt dus $e^{it} \cdot e^{-it} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

5.5 *De schrijfwijze re^{it} voor een complex getal*
Heeft het complexe getal z absolute waarde r en argument t, dan kun je z schrijven als

$$z = r(\cos t + i\sin t) = re^{it}\,.$$

Bijvoorbeeld $1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$ omdat $|1 + i| = \sqrt{2}$ en $\arg(1 + i) = \pi/4$.

5.2 Rekenregels

5.6 *De rekenregel $e^{i(u+v)} = e^{iu} \cdot e^{iv}$ voor de complexe e-macht*
De complexe e-macht deelt karakteristieke eigenschappen met de reële e-macht. De eigenschap

$$e^{i(u+v)} = e^{iu} \cdot e^{iv}$$

voor alle reële u en v is er één van. Deze rekenregel leent zich uitstekend om na te gaan door de absolute waarden en de argumenten van $e^{i(u+v)}$ enerzijds en $e^{iu} \cdot e^{iv}$ anderzijds met elkaar te vergelijken.

- Absolute waarde en argument van $e^{i(u+v)}$ zijn respectievelijk 1 en $u + v$.
- Nu het rechterlid. Om de uitdrukking $e^{iu} \cdot e^{iv}$ te analyseren, hebben we de rekenregel nodig die zegt dat de absolute waarde van een product gelijk is aan het product van de absolute waarden en dat het argument van een product gelijk is aan de som van de argumenten (op een veelvoud van 2π na). De absolute waarde van $e^{iu} \cdot e^{iv}$ is

  $$|e^{iu} \cdot e^{iv}| = |e^{iu}| \cdot |e^{iv}| = 1 \cdot 1 = 1.$$

  Voor het argument vinden we met behulp van de rekenregel voor het argument van producten van complexe getallen:

  $$\arg(e^{iu} \cdot e^{iv}) = \arg(e^{iu}) + \arg(e^{iv})\ (+2k\pi) = u + v\ (+2k\pi).$$

Kortom, absolute waarden en argumenten van e^{z+w} en $e^z \cdot e^w$ zijn gelijk (op een veelvoud van 2π na voor wat het argument betreft), dus betreft het dezelfde complexe getallen.

5.7 *De rekenregel $(e^{it})^n = e^{nit}$ voor gehele n*
Nadere beschouwing van de rekenregel $e^{i(u+v)} = e^{iu} \cdot e^{iv}$ levert nog een nuttige rekenregel op. Als we voor u en v beide keren t invullen, vinden we

$$e^{2it} = e^{it} \cdot e^{it} \quad \text{ofwel} \quad e^{2it} = (e^{it})^2.$$

Maar dan vinden we ook:

$$e^{3it} = e^{2it+it} = e^{2it} \cdot e^{it} = (e^{it})^2 \cdot e = (e^{it})^3.$$

Enzovoort. Kortom, voor positieve gehele getallen n geldt

$$e^{nit} = (e^{it})^n.$$

Dat de regel ook voor de overige gehele getallen geldt, verifiëren we in de opgaven. Wel merken we op dat voor $n = -1$ de regel luidt:

$$e^{-it} = (e^{it})^{-1} = \frac{1}{e^{it}}.$$

Zie de opgaven bij deze paragraaf voor verrassende toepassingen van de rekenregel.

5.8 *De sinus en de cosinus uitgedrukt in complexe e-machten*
Voor elke reële waarde van t geldt $e^{it} = \cos t + i \sin t$ zoals we boven zagen. Vullen we $-t$ in, dan vinden we $e^{-it} = \cos t - i \sin t$ omdat $\sin(-t) = -\sin t$. Dit zijn twee e-machten uitgedrukt in de cosinus en de sinus. Met behulp van deze twee relaties kunnen we omgekeerd de cosinus en de sinus uitdrukken in termen van de complexe e-macht. Start daartoe met

$$\begin{aligned} e^{it} &= \cos t + i \sin t \\ e^{-it} &= \cos t - i \sin t. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Als we deze twee gelijkheden optellen, dan vinden we

$$e^{it} + e^{-it} = 2\cos t \quad \text{en dus:} \quad \cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}). \tag{5.2}$$

Trekken we de twee relaties uit (5.1) van elkaar af, dan vinden we

$$e^{it} - e^{-it} = 2i \sin t \quad \text{en dus:} \quad \sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}). \tag{5.3}$$

Berekeningen met sinussen en cosinussen kunnen via e-machten soms aanzienlijk vereenvoudigen.

5.9 *De regel* $\sin 2t = 2\cos t \sin t$ *geverifieerd via e-machten*
Met behulp van complexe e-machten blijkt het natrekken van de gonioregel $\sin 2t = 2\cos t \sin t$ een 'bewijs door uitschrijven' te zijn. Kijk maar eens naar de volgende stappen, waarin we zowel $\sin 2t$ als $2\cos t \sin t$ uitdrukken in e-machten.

- Er geldt (zie (5.3) en gebruik $2t$ in plaats van t):

$$\sin 2t = \frac{1}{2i}(e^{2it} - e^{-2it}).$$

- Nu werken we $2\cos t \sin t$ uit in termen van e-machten:

$$2\cos t \sin t = 2 \cdot \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \cdot \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) = \ldots$$

  De factoren 2, $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2i}$ leveren samen $\frac{1}{2i}$ op, terwijl

$$(e^{it} + e^{-it})(e^{it} - e^{-it}) = e^{it} \cdot e^{it} - e^{it} \cdot e^{-it} + e^{-it} \cdot e^{it} - e^{-it} \cdot e^{-it} = e^{2it} - e^{-2it}.$$

  (Zie je trouwens hoe je met behulp van het merkwaardige product $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ een rekenstap kunt overslaan?)

- Dus $\sin 2t$ als $2\cos t \sin t$ zijn beide gelijk aan

$$\frac{1}{2i}(e^{2it} - e^{-2it})$$

  en dus gelijk aan elkaar.

Allerlei gonioregels kun je via e-machten zonder moeilijke trucs nagaan op soortgelijke wijze. Om gonioformules op het spoor te komen, kun je beter anders te werk gaan, ook met e-machten. Zie de opgaven.

5.10 *Trillingen optellen via e-machten*
De functie $f(t) = \sqrt{3}\,\sin 2t$ van de tijd t beschrijft een *harmonische trilling* met amplitude $\sqrt{3}$ en hoeksnelheid of frequentie 2. In het algemeen kun je zo'n trilling beschrijven in de vorm $A\cos(\omega t + \varphi)$ of $A\sin(\omega t + \varphi)$ (waarbij $A > 0$, ω en φ reële constanten zijn; φ heet wel de fasehoek).

Soms komen e-machten van pas om een samengestelde trilling in de net genoemde gedaante te krijgen. Hier is een voorbeeld. We tellen de trillingen $\sqrt{3}\,\sin 2t$ en $\cos 2t$ op door over te stappen op e-machten.

$$\sqrt{3} \cdot \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i} + \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2i} + \frac{1}{2}\right) e^{2it} + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2i} + \frac{1}{2}\right) e^{-2it}$$

Het rechterlid herleiden we tot

$$\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})e^{2it} + \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})e^{-2it}$$

Aangezien $\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) = e^{-i\pi/3}$ en $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) = e^{i\pi/3}$ vinden we

$$e^{-i\pi/3} \cdot e^{2it} + e^{i\pi/3} \cdot e^{-2it} = e^{2it - i\pi/3} + e^{-(2it - i\pi/3)} = 2\cos(2t - \pi/3).$$

We zien dat de som van de trillingen amplitude 2 heeft en frequentie 2. Er is wel een faseverschuiving opgetreden.

5.11 *Een som van cosinussen*

Onze nieuwe e-machten kunnen handig zijn bij het vinden van 'gesloten' formules voor sommen van goniometrische functies. Dit type probleem komt onder meer voor in de elektrotechniek bij het onderzoek aan signalen.

In het volgende voorbeeld maken we gebruik van de volgende formule voor een meetkundige som (voor $a \neq 1$):

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Het rechterlid is een zogenaamde gesloten uitdrukking voor de som uit het linkerlid.

Stel je voor dat je een gesloten formule voor de som $1 + \cos t + \cos 2t + \cos 3t + \cdots + \cos nt$ wilt opsporen. Via complexe e-machten blijkt deze vraag terug te brengen te zijn tot meetkundige sommen. Elk van de cosinussen is het reële deel van een complexe e-macht: $\cos mt = \mathrm{Re}(e^{imt})$. Dus geldt:

$$1 + \cos t + \cos 2t + \cos 3t + \cdots + \cos nt = \mathrm{Re}(1 + e^{it} + e^{2it} + \cdots + e^{int}).$$

(Hier gebruiken we de rekenregel $\mathrm{Re}(z + w) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w)$.) De uitdrukking $1 + e^{it} + e^{2it} + \cdots + e^{int}$ is een deel van een meetkundige som op grond van de eigenschap $e^{inz} = (e^{iz})^n$ van de e-macht:

$$1 + e^{it} + e^{2it} + \cdots + e^{int} = 1 + e^{it} + (e^{it})^2 + \cdots + (e^{it})^n.$$

Deze laatste som is gelijk aan

$$\frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}}$$

(althans, als t geen veelvoud is van 2π). Nu komt het er dus op aan van deze uitdrukking het reële deel te nemen. Daartoe gaan we de breuk bewerken zodat de noemer reëel wordt. De noemer is gelijk aan $1 - e^{it}$ ofwel $1 - \cos t - i\sin t$. We vermenigvuldigen daarom teller en noemer met $1 - \cos t + i\sin t$.

$$\begin{aligned}
\frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} &= \frac{1 - \cos(n+1)t - i\sin(n+1)t}{1 - \cos t - i\sin t} \\
&= \frac{(1 - \cos(n+1)t - i\sin(n+1)t)(1 - \cos t + i\sin t)}{(1 - \cos t - i\sin t)(1 - \cos t + i\sin t)} \\
&= \frac{(1 - \cos(n+1)t)(1 - \cos t) + \sin(n+1)t\sin t + i\ldots}{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}
\end{aligned}$$

Het reële deel is dus gelijk aan (gebruik $(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 2 - 2\cos t$)

$$\frac{(1 - \cos(n+1)t)(1 - \cos t) + \sin(n+1)t \sin t}{2 - 2\cos t}$$

en deze uitdrukking is achtereenvolgens te vereenvoudigen tot

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(n+1)t + \frac{\sin t \sin(n+1)t}{2 - 2\cos t}$$

en dus tot

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(n+1)t + \frac{\cos(t/2)\sin(n+1)t}{2\sin(t/2)},$$

omdat $\sin t = 2\sin(t/2)\cos(t/2)$ en $1 - \cos t = 2\sin^2(t/2)$.

5.3 De complexe e-macht: algemene definitie

5.12 *Definitie van e^z*
Als je eenmaal weet wat e^{it} is voor reële t, dan is het niet moeilijk meer te raden wat de definitie van e^z zou moeten zijn voor een complex getal z. Als $z = x + iy$, dan wil je natuurlijk dat de rekenregel $e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$ van kracht blijft. Maar dan blijft als enig mogelijke definitie over:

$$e^z = e^x \cdot e^{iy}.$$

Hierin is e^x de 'gewone' reële e-macht en e^{iy} de eerder geïntroduceerde e-macht.

5.13 **Voorbeeld** Als $z = 2 + i\pi$, dan is $e^z = e^2 \cdot e^{i\pi} = e^2 \cdot (-1) = -e^2$.

2 **Opgave** Wat is de absolute waarde van e^z als $z = 2 + i$? En als $z = x + iy$ (met x en y reëel)? Waarom is e^z voor geen enkele z gelijk aan 0?

5.14 *Rekenregels voor de e-macht*
We zullen de hieronder genoemde rekenregels niet afleiden, maar volstaan met de opmerking dat ze zijn af te leiden op een wijze die vergelijkbaar is met de manier waarop we de rekenregels voor e^{it} hebben afgeleid.

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$$
$$(e^z)^n = e^{nz}$$

(z en w zijn complexe getallen, n is een geheel getal). In het bijzonder is (neem $n = -1$)

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$$

5.15 *De e-macht en differentiaalvergelijkingen*
Een differentiaalvergelijking is een betrekking tussen een functie en zijn afgeleiden. Zo is

$$y''(t) + y(t) = 0$$

een differentiaalvergelijking. Differentiaalvergelijkingen komen veel voor in de natuurkunde. De vraag is om uit te zoeken welke functies $y(t)$ voldoen aan deze betrekking. Bij de net genoemde differentiaalvergelijking is het niet moeilijk om na te gaan dat $f(t) = \cos t$ en $g(t) = \sin t$ (functies van de reële t) oplossingen zijn:

$$f'(t) = -\sin t, \; f''(t) = -\cos t = -f(t), \; g'(t) = \cos t, \; g''(t) = -\sin t = -g(t).$$

Er geldt dus $f''(t) + f(t) = 0$ (voor alle t) en $g''(t) + g(t) = 0$ (voor alle t).

Tweedegraads vergelijkingen en complexe e-machten zijn de ingrediënten om tweede orde differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten op te lossen. Hier volgt een schets naar aanleiding van het net genoemde voorbeeld. In de differentiaalvergelijking zijn de coëfficiënten van y'', y' en y achtereenvolgens 1, 0 en 1. Daarom blijk je eerst de vergelijking $1 \cdot z^2 + 0 \cdot z + 1 = 0$ te moeten oplossen. Met de oplossingen i en $-i$ kun je dan de oplossingen van de differentiaalvergelijking opschrijven:

$$A\, e^{it} + B\, e^{-it},$$

maar wel in complexe notatie (de oplossingen van de vergelijking komen in de exponent.) Vervang je e^{it} door $\cos t + i \sin t$ en e^{-it} door $\cos t - i \sin t$, dan vind je:

$$A(\cos t + i \sin t) + B(\cos t - i \sin t) = (A + B) \cos t + i(A - B) \sin t.$$

Kies je $A = B = 1/2$, dan vind je bijvoorbeeld $\cos t$ terug; kies je $A = -i/2$ en $B = i/2$, dan vind je $\sin t$ terug.

Opgaven bij hoofdstuk 5

3 Schrijf uit in de vorm $x + iy$.

a) $e^{4\pi i}$

b) $e^{-\pi i}$

c) $e^{\frac{1}{2}\pi i}$

d) $e^{\frac{3\pi i}{4}}$

e) $e^{37\pi i}$

f) $e^{\frac{5\pi i}{3}}$

4 Teken de getallen

$$e^{\frac{2\pi i}{6}},\ e^{\frac{4\pi i}{6}},\ e^{\frac{6\pi i}{6}},\ e^{\frac{8\pi i}{6}},\ e^{\frac{10\pi i}{6}},\ e^{\frac{12\pi i}{6}}$$

in het complexe vlak. Wat valt je op? Kun je dit verklaren? Kun je op soortgelijke wijze de hoekpunten op de eenheidscirkel van een regelmatige 11-hoek beschrijven? Wat worden de hoekpunten als je veelhoek over $\pi/2$ radialen roteert?

5 Uit de gelijkheid $e^{2it} = e^{it} \cdot e^{it}$ (voor reële t) blijk je twee gonioformules te kunnen afleiden.

a) Vervang in het rechterlid de e-macht e^{it} beide keren door $\cos t + i \sin t$ en werk het product uit.

b) Vervang het linkerlid door $\cos 2t + i \sin 2t$. Vergelijk nu de reële delen links en rechts en de imaginaire delen links en rechts. Welke twee gonioformules vind je?

c) Vorige onderdelen kun je ook zo lezen: als je $\cos 2t$ wilt uitdrukken in termen van $\cos t$ en $\sin t$ dan kan dat door de gelijkheid $e^{2it} = e^{it} \cdot e^{it}$ te analyseren. Welke gelijkheid zou je moeten analyseren als je $\cos 3t$ wilt uitdrukken in termen van $\cos t$ en $\sin t$? Denk je dat het mogelijk is $\cos nt$ uit te drukken in termen van $\cos t$ en $\sin t$?

6 In de gelijkheid $e^{i(s+t)} = e^{is} \cdot e^{it}$ (voor reële s en t) zitten twee gonioformules verborgen.

a) Geef aan, nog zonder berekening, welke cosinussen en sinussen in deze formules optreden.

b) Gebruik de definitie van de complexe e-macht om de e-machten te vervangen door cosinussen en sinussen en werk de gelijkheid $e^{i(s+t)} = e^{is} \cdot e^{it}$ uit. Hoe zien de bijbehorende gonioformules eruit?

c) Je wilt $\cos(r + s + t)$ uitdrukken in termen van $\cos r$, $\cos s$, $\cos s$, $\sin s$, $\cos t$ en $\sin t$. Welke relatie tussen e-machten kun je gebruiken om zo'n relatie af te leiden?

7 In de tekst is de regel $e^{nit} = (e^{it})^n$ genoemd (waarbij t een reëel getal is en n een geheel getal). In deze opgave gaan we nader in op de vraag waarom deze regel geldt. Voor $n = 2$ en $n = 3$ is de regel al in de tekst besproken.

a) Laat met behulp van de absolute waarde en het argument van e^{-it} en van $\dfrac{1}{e^{it}}$ zien dat $e^{-it} = \dfrac{1}{e^{it}}$.

b) Leid af dat $e^{-2it} = (e^{it})^{-2}$ en $e^{-3it} = (e^{it})^{-3}$.

c*) Met behulp van *volledige inductie* volgt de regel $e^{nit} = (e^{it})^n$ voor alle gehele n. We splitsen het probleem in twee gevallen: n positief en n negatief. In beide gevallen resteert de zogenaamde inductiestap (waarom?).

c1) In dit geval luidt de inductiestap: als $e^{nit} = (e^{it})^n$ geldt voor zekere n, dan geldt ook $e^{(n+1)it} = (e^{it})^{n+1}$. Toon dit aan.

c2) Nu luidt de inductiestap: als $e^{nit} = (e^{it})^n$ geldt voor zekere n, dan geldt ook $e^{(n-1)it} = (e^{it})^{n-1}$. Toon dit aan.

8 Uit de gelijkheid $e^{it} = \cos t + i \sin t$ kun je afleiden dat

$$\frac{d}{dt}(e^{it}) = i\, e^{it}.$$

Combinaties van functies waarin e^{it} voorkomt kun je differentiëren met behulp van de gebruikelijke regels, zoals de productregel.

a) Laat zien dat geldt

$$1 + e^{it} + e^{2it} + \cdots + e^{nit} = \frac{1 - e^{(n+1)it}}{1 - e^{it}}.$$

b) Leid met behulp van differentiëren een gesloten formule af voor

$$e^{it} + 2e^{2it} + 3e^{3it} + \cdots + ne^{nit}.$$

9 *De complexe e-macht*

a) Laat zien dat als z reëel is de nieuwe e-macht samenvalt met de reële e-macht.

b) Schrijf $z = x + iy$ en bepaal de absolute waarde en het argument van e^{x+iy} en e^{x-iy}. Laat met behulp hiervan zien dat $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.

c) Bewijs met behulp van absolute waarde en argument dat voor alle complexe z en w geldt:

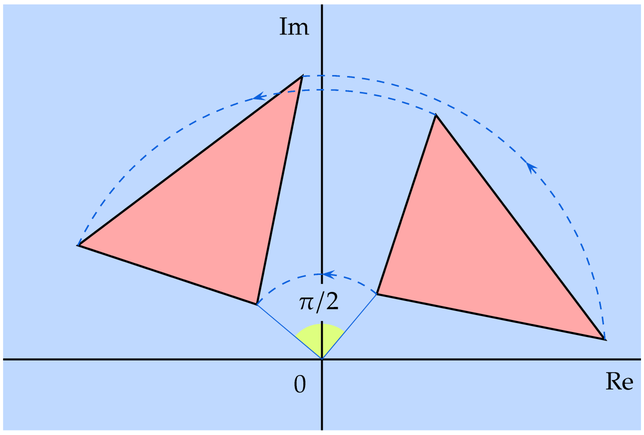
$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w.$$

Hoofdstuk 6

Meetkunde en complexe getallen

6.1 *Complexe getallen en meetkundige transformaties*

In deze paragraaf gaan we in op de rol van complexe getallen bij het aanpakken van meetkundige problemen. Van deze rol bij de meetkunde wordt wel in computersoftware gebruik gemaakt bij grafische toepassingen. In Fig. 6.1 zie je het effect van een rotatie over 90 graden

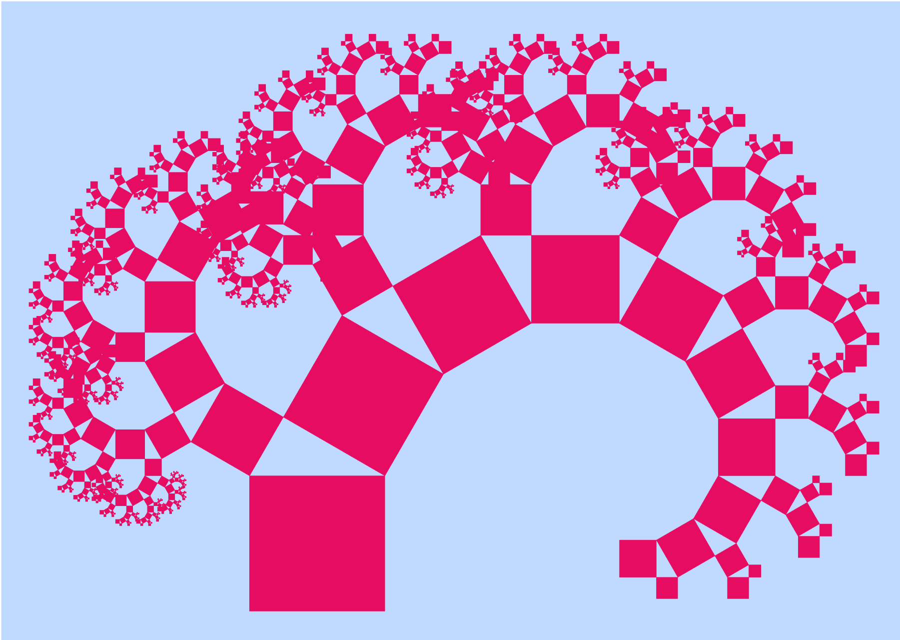


Figuur 6.1 Vermenigvuldigen van de rechterdriehoek met i: roteren over 90°.

van de rechter driehoek. Die rotatie kun je beschrijven door elk van de punten van de figuur met i te vermenigvuldigen. Het argument van i is namelijk gelijk aan $\pi/2$, terwijl de absolute waarde gelijk is aan 1. Zoals we in 4.7 op p. 36 gezien hebben, heeft vermenigvuldigen van een complex getal z met i dus als effect dat de afstand tot 0 (de absolute waarde) van z niet verandert, terwijl het argument met $\pi/2$ wordt opgehoogd:

$$|zi| = |z| \cdot |i| = |z| \text{ en } \arg(zi) = \arg(z) + \arg(i) = \arg(z) + \pi/2.$$

Kortom, een rotatie. Vermenigvuldig je met bijvoorbeeld $i/2$, dan worden punten geroteerd over 90 graden, maar wordt hun afstand tot 0 gehalveerd. Met variaties hierop kun je mooie plaatjes maken. Het plaatje in Fig. 6.2 is met deze techniek gemaakt.



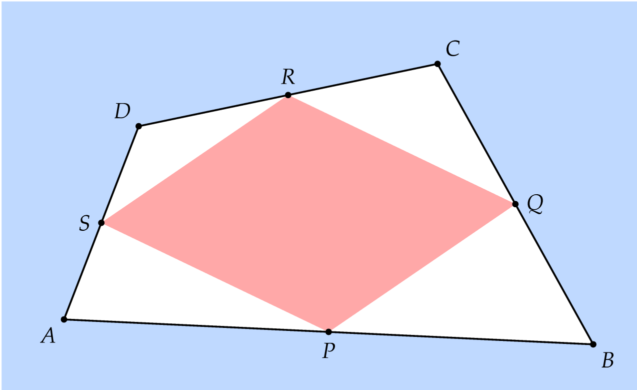
Figuur 6.2 Een wiskundige boom. Op het grote vierkant onderaan is een rechthoekige driehoek geplaatst. Op de rechthoekszijden ervan plaatsen we precies passende kleinere vierkanten. Vervolgens herhalen we het procédé met de nieuwe vierkanten.

1 Opgave Beschrijf spiegelen in de reële as met behulp van complexe getallen.

6.2 *Vlakke meetkunde*
Naast het maken van fraaie plaatjes, kunnen we met complexe getallen ook vraagstukken uit de vlakke meetkunde aanpakken. De punten uit het platte vlak zien we als complexe getallen. We hebben dan de optelling en vermenigvuldiging van complexe getallen en allerlei eigenschappen extra tot onze beschikking. Meetkundige transformaties zoals translaties en rotaties kunnen we met complexe getallen algebraïsch beschrijven.

6.3 *Een parallellogram in een vierhoek*
Start met een vierhoek $ABCD$ in het vlak, waarbij geen tweetal punten samenvalt. Laat P het midden zijn van AB, Q het midden van BC, R het midden van CD en S het midden van AD. Het plaatje suggereert al: vierhoek $PQRS$ is een parallellogram (ongeacht de ligging van de punten A, B, C en D).

Om deze bewering te bewijzen gebruiken we complexe getallen. We moeten laten zien dat de zijden PQ en SR even lang zijn en parallel. In termen van complexe getallen betekent dit: het verschil van de getallen



die bij P en Q horen is gelijk aan het verschil van de getallen die bij de hoekpunten S en R horen. Onze strategie is nu om de gegevens over P, Q, R en S uit te drukken in de complexe getallen die horen bij A, B, C en D.

Noem de complexe getallen die met de hoekpunten A, B, C en D corresponderen achtereenvolgens α, β, γ en δ. Dan correspondeert het midden P van AB met $p = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, enzovoort. Dus

$$\begin{aligned} P &\longleftrightarrow p = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \\ Q &\longleftrightarrow q = \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) \\ R &\longleftrightarrow r = \tfrac{1}{2}(\gamma + \delta) \\ S &\longleftrightarrow s = \tfrac{1}{2}(\alpha + \delta). \end{aligned}$$

Het verschil $q - p$ kunnen we nu in α, β, γ en δ uitdrukken:

$$= q - p = \frac{1}{2}(\beta + \gamma) - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}(\gamma - \alpha).$$

Net zo vinden we voor het verschil $r - s$:

$$r - s = \frac{1}{2}(\gamma + \delta) - \frac{1}{2}(\alpha + \delta) = \frac{1}{2}(\gamma - \alpha).$$

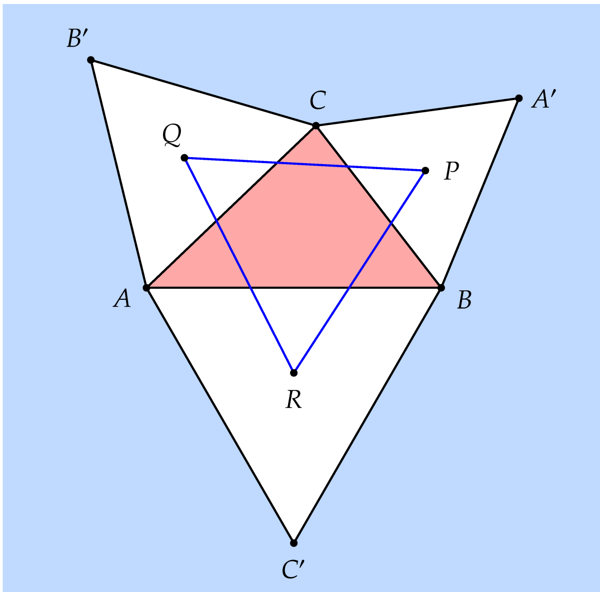
Kortom $q - p = r - s$ en dat laat precies zien dat EF en HG parallel zijn en gelijke lengte hebben.

6.4 *De stelling van Napoleon*
Men zegt dat de volgende stelling ontdekt is in de kringen van Napoleon.

6.5 **Stelling (Napoleon)** Beschrijf op de buitenkanten van de drie zijden van driehoek $\triangle ABC$ gelijkzijdige driehoeken. Als P, Q en R de zwaartepunten zijn van deze drie driehoeken, dan is driehoek PQR een gelijkzijdige driehoek. (Zie Fig. 6.3.)

6.6 *De stelling van Napoleon: vervolg*
Een gelijkzijdige driehoek heeft drie gelijke zijden en drie gelijke hoeken van 60 graden. Als p, q, r complexe getallen zijn die bij de hoekpunten van een driehoek horen, dan is het voldoende om na te gaan dat $r - q$ door rotatie over 60 graden overgaat in $p - q$. Nu bewerkstelligt vermenigvuldiging met $\rho = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6)$ precies een rotatie over 60 graden (zie Opgave 18 op p. 46). Dus het is voldoende te laten zien dat $\rho(r - q) = p - q$. Is dat het geval, dan is de driehoek met hoekpunten p, q, r gelijkzijdig.

Deze strategie gaan we toepassen op onze situatie. We beschrijven eerst driehoek ABC met complexe getallen, en drukken vervolgens de punten P, Q en R uit in deze complexe getallen. We gebruiken verder nog (zonder bewijs hier) dat het zwaartepunt van een driehoek met hoekpunten (als complexe getallen weergegeven) p, q en r gelijk is aan $(p + q + r)/3$. Dan nu de uitwerking. We kiezen de oorsprong in punt

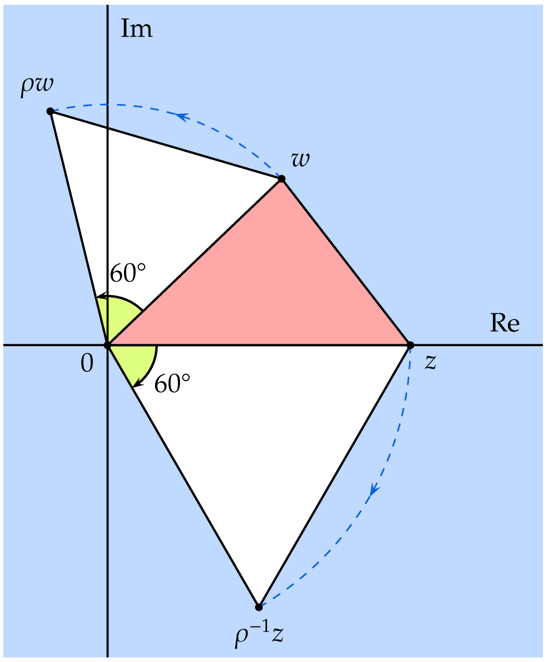


Figuur 6.3 De stelling van Napoleon.

A, geven punt B aan met het complexe getal z en punt C met het getal w. Dan beschrijven we de hoekpunten B', C', A':

- B' verkrijg je uit C door rotatie om de oorsprong over 60 graden. Dus B' kunnen we beschrijven met het complexe getal ρw.

- Punt C' ontstaat door B te roteren over 60 graden met de wijzers van de klok mee: $\rho^{-1}z$.



Figuur 6.4 Rotatie van w en z.

- Dit punt is wat lastiger. Punt A' ontstaat uit B door te roteren om C over 60 graden: Dit geeft het complexe getal $w + \rho(z - w)$.

Nu bepalen we de drie zwaartepunten van de driehoeken:

$$q = \frac{w + \rho w}{3}, \; r = \frac{z + \rho^{-1}z}{3}, \; p = \frac{(z + w) + w + \rho(z - w)}{3}.$$

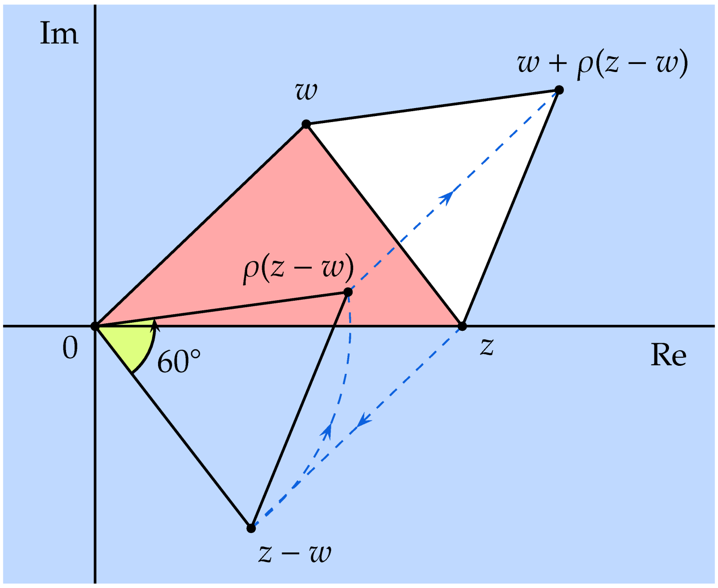
Om geen last te hebben van de factor 3, vermenigvuldigen we waar nodig met 3. Om te laten zien dat driehoek pqr gelijkzijdig is, laten we zien dat lijnstuk $3r - 3q$ door rotatie over 60 graden overgaat in lijnstuk $3p - 3q$. Nu is $3r - 3q = (1 + \rho^{-1})z - (1 + \rho)w$. Vermenigvuldigen met ρ levert

$$\rho(1 + \rho^{-1})z - \rho(1 + \rho)w = (1 + \rho)z - (\rho + \rho^2)w. \tag{6.1}$$

Anderzijds is

$$3p - 3q = (z + w) + w + \rho(z - w) - w - \rho w = (1 + \rho)z + (1 - 2\rho)w. \tag{6.2}$$

Omdat $1 - 2\rho = -\rho - \rho^2$ (zie Opgave 18) zijn de rechterleden van de gelijkheden (6.1) en (6.2) gelijk. Daarmee is de stelling bewezen.



Figuur 6.5 Rotatie van z om w.

Opgaven bij hoofdstuk 6

2 Met welk complex getal moet je het getal $2 + i$ vermenigvuldigen om dit getal over de hieronder aangegeven hoek te roteren? Geef in alle gevallen het geroteerde getal in de vorm $a + bi$ met a en b reëel.

a) $90°$ met de wijzers van de klok mee.
b) $45°$ tegen de wijzers van de klok in.
c) $135°$ tegen de wijzers van de klok in.
d) $30°$ met de wijzers van de klok mee.
e) $120°$ tegen de wijzers van de klok in.
f) $180°$.

3 *Rechte lijnen door* 0

a) De rechte lijn ℓ door 0 en $1 + 3i$ bestaat uit alle complexe getallen van de vorm $a(4 + 3i)$ met a reëel. Bepaal een getal op deze rechte dat absolute waarde 1 heeft.
b) De rechte m door 0 staat loodrecht op ℓ. Bepaal een complex getal z zodat de punten op m van de vorm az zijn met a een reëel getal.

4 *Rechte lijnen*

a) Als z een complexe getal is, dan bestaat de rechte lijn door 0 en z uit alle complexe getallen van de vorm az, waarbij a een willekeurig *reëel* getal is. Welke rechte lijn wordt beschreven door $z + a(w - z)$? Hier zijn z en w twee verschillende complexe getallen en doorloopt a weer de reële getallen. En welke rechte lijn wordt beschreven door de complexe getallen $bz + (1 - b)w$

waarbij b de reële getallen doorloopt? Welk deel van de rechte lijn krijg je als b alleen de getallen uit het interval $[0, 1]$ doorloopt?

b) De rechte ℓ bestaat uit de getallen $i + a(2 + 3i)$ (met a reëel). Spiegel ℓ in de reële as. Beschrijf deze rechte met behulp van complexe getallen.

c) Roteer ℓ over $\pi/2$ radialen om 0. Beschrijf de resulterende rechte.

d) Maakt het uit of je ℓ eerst roteert over $\pi/2$ radialen en vervolgens spiegelt in de reële as, of eerst spiegelt en dan roteert?

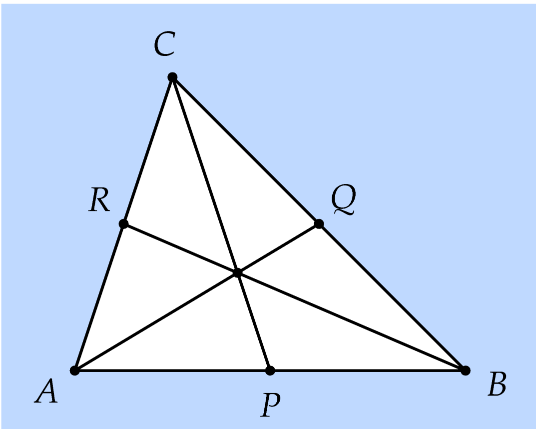
5 *Spiegelen in een rechte*

a) De complexe getallen u en v zijn elkaars spiegelbeeld in de reële as. Druk v uit in u.

b) De complexe getallen z en w zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in de rechte ℓ die bestaat uit de getallen $a(1 + i)$ met a reëel. De getallen $(1 - i)z$ en $(1 - i)w$ zijn dan ook elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in een rechte door 0. Welke? Bereken de gespiegelde van $z = 4 + 3i$ bij spiegeling in de rechte ℓ.

c) De rechte ℓ bestaat uit de complexe getallen van de vorm $a(\sqrt{3} + i)$ met a reëel. Welke hoek maakt ℓ met de positieve reële as? Spiegel het getal $3 + 6i$ in ℓ.

6 *De zwaartelijnen in een driehoek*
Een *zwaartelijn* in een driehoek is een rechte door een van de hoekpunten en het midden van de tegenover het hoekpunt gelegen zijde. In driehoek $\triangle ABC$ zijn P, Q en R achtereenvolgens de middens van de zijden AB, BC en AC (Zie Fig. 6.6.)



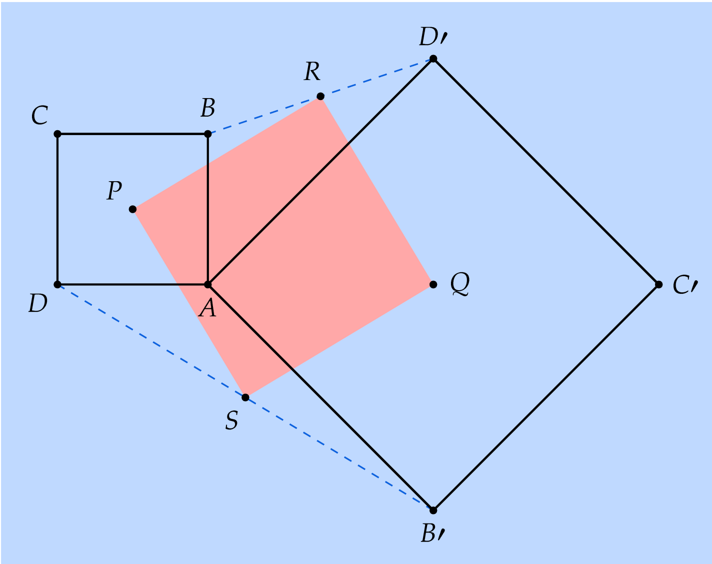
Figuur 6.6 In driehoek $\triangle ABC$ gaan de drie zwaartelijnen door één punt.

a) Geef A, B en C aan met de complexe getallen α, β en γ. Druk nu P, Q en R ook uit in deze getallen.

b) Laat zien dat $\frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma)$ op alledrie de zwaartelijnen ligt.

7 Start met twee vierkanten $ABCD$ en $AB'C'D'$ die hoekpunt A gemeen hebben. Het snijpunt van de diagonalen AC en BD noemen we P; het snijpunt van de diagonalen

AC' en $B'D'$ noemen we Q. Verder is R het midden van lijnstuk BD', en S het midden van lijnstuk $B'D$. Figuur 6.7 suggereert dat $PSQR$ een vierkant is. We gebruiken complexe getallen om dit te onderzoeken.



Figuur 6.7 Twee vierkanten met gemeenschappelijk hoekpunt A. De centra P en Q van de vierkanten en de middens van de lijnstukken BD' en $B'D$ vormen een vierkant.

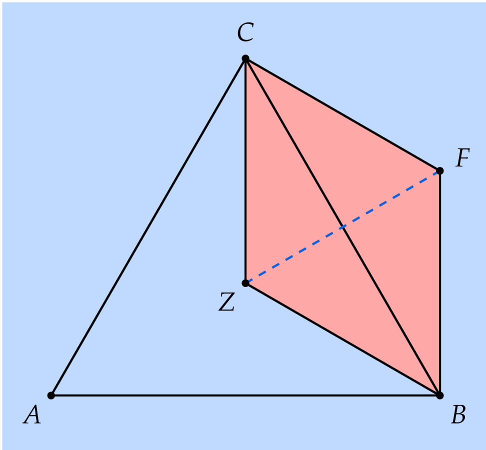
a) Kies de oorsprong in A. De complexe getallen die bij de overige punten horen, geven we aan met kleine letters. Het feit dat $ABCD$ een vierkant is betekent dat er relaties zijn tussen de hoekpunten, die we met behulp van complexe getallen kunnen vastleggen. Druk met behulp van complexe getallen d uit in b [Hint: rotatie.]. Druk ook d' uit in b'.

b) Druk nu de punten r, s, p en q uit in b en b'.

c) Als $PSQR$ inderdaad een vierkant is, dan zou zijde PS even lang moeten zijn als zijde PR en zouden deze twee zijden loodrecht op elkaar moeten staan. Wat betekent dit voor de bijbehorende complexe getallen?

d) Voltooi het bewijs.

8 *Een ruit en een parallelogram*
In de gelijkzijdige driehoek $\triangle ABC$ is Z het zwaartepunt. Punt F ligt zó dat vierhoek $CZBF$ een ruit is. Dan is driehoek $\triangle CZF$ gelijkzijdig. We onderzoeken dit probleem met complexe getallen.



(a) In dit probleem spelen hoeken van 60° een rol. Als zijde AB door een rotatie over 60° om A overgaat in zijde AC van driehoek $\triangle ABC$, wat kun je dan zeggen van $\triangle ABC$?

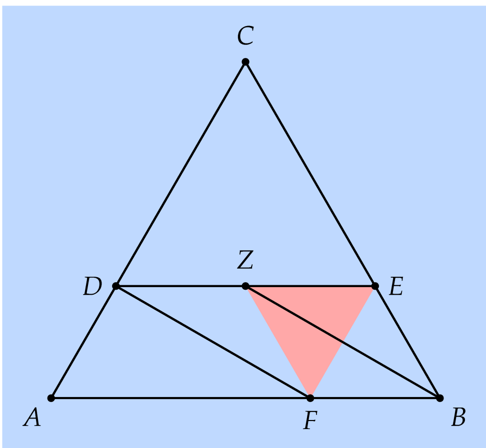
b) Met welk complex getal moet je vermenigvuldigen om een rotatie over 60° om 0 te bewerkstelligen? Dit getal noemen we ρ. Beschrijf dit getal in poolcoördinaten. Wat is het reële deel en wat is het imaginaire deel van dit getal?

c) Waarom geldt $\rho^3 = -1$? Reken na dat $\rho^2 - \rho + 1 = 0$. [Hint: met behulp van a) of met behulp van $z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1)$.]

c) De complexe getallen bij de punten geven we aan met overeenkomstige kleine letters. Laten we A in de oorsprong kiezen. Druk c, z en f uit in termen van b en ρ.

d) Bewijs met complexe getallen dat $\triangle CZF$ gelijkzijdig is.

9 In de gelijkzijdige driehoek $\triangle ABC$ is Z het zwaartepunt. Verder ligt D op zijde AC, E op zijde BC zodat Z op DE ligt en DE evenwijdig is met AB. Punt F ligt op AB zodat vierhoek $DZBF$ een parallellogram is.

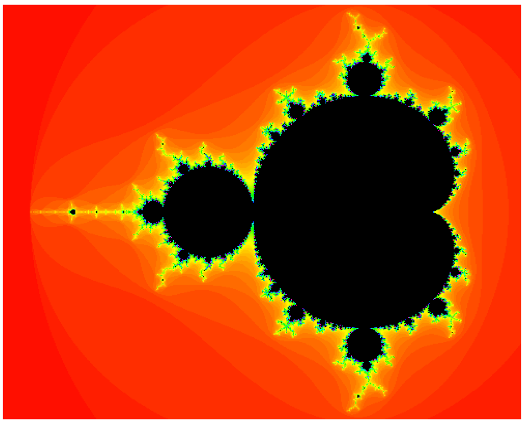


Bewijs met behulp van complexe getallen dat $\triangle ZFE$ gelijkzijdig is.

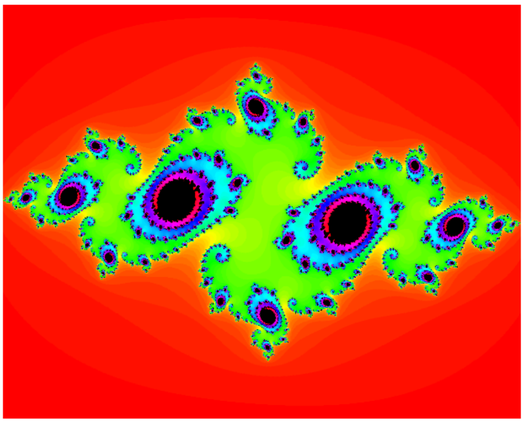
Hoofdstuk 7

Fractals

Fraaie kleurige plaatjes zoals je hieronder ziet zijn gemaakt met behulp van een wiskundig recept. Bijzonder aan de plaatjes is dat naarmate je verder inzoomt er steeds weer dezelfde mate van detail opduikt. We spreken van *fractals*. Zulke plaatjes kun je dan ook het best eens met een computer nader bekijken.



a. De Mandelbrot verzameling



b. Een Julia verzameling

Figuur 7.1 Twee fractals.

7.1 *Iteratie*
Iteratie is het herhalen van een of ander vast wiskundig voorschrift, meestal in de wereld van getallen. Je maakt bijvoorbeeld een rij getallen a_1, $a_2, \ldots$ door te starten met het getal $a_1 = 1$ en af te spreken dat $a_{n+1} = a_n + 2$ voor elk positief geheel getal. Je vindt dan $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5, \ldots$ (de oneven getallen).

Omdat we nu ook kunnen rekenen met complexe getallen, dus met punten uit het vlak, blijkt het de moeite waard te kijken of daar bijzondere patronen optreden. Complexe getallen kunnen we tekenen in het vlak en daarom is er een mogelijkheid dat er fraaie en/of zinvolle plaatjes ontstaan. Bijvoorbeeld, als we definiëren

$$z_1 = 1, \text{ en } z_{n+1} = iz_n,$$

dan vinden we achtereenvolgens de getallen 1, i, -1, $-i$, 1, i enz. Dat zijn dus de hoekpunten van een vierkant die steeds opnieuw doorlopen worden. Als we het voorschrift veranderen in

$$z_1 = 1, \text{ en } z_{n+1} = \frac{2i}{3} \cdot z_n,$$

verandert het patroon in de zin dat de opeenvolgende getallen naar 0 spiraliseren:

$$1, 2i/3, -4/9, -8i/27, \ldots$$

Met een iets ander iteratievoorschrift en het inbrengen van kleur komen we terecht bij fraaiere plaatjes.

7.2 *De Mandelbrot verzameling*

In dit hoofdstuk gaan we een redelijk eenvoudig recept herhaald uitvoeren en komen dan bij wonderlijke figuren uit. Kies een complex getal c. Het iteratievoorschrift luidt

$$\begin{cases} z_0 := 0 \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$$

Afhankelijk van het getal c onderscheiden we twee situaties:

(a) De verzameling getallen $z_0, z_1, \ldots$ is begrensd, dat wil zeggen blijft altijd binnen een zekere afstand van 0. De verzameling van getallen c waarvoor dit optreedt heet de *Mandelbrot* verzameling.

(b) De verzameling getallen $z_0, z_1, \ldots$ is niet begrensd. Afhankelijk van de snelheid waarmee de getallen $z_0, z_1, \ldots$ groeien, geven we het punt c een kleur.

Het resultaat is een plaatje als hierboven.

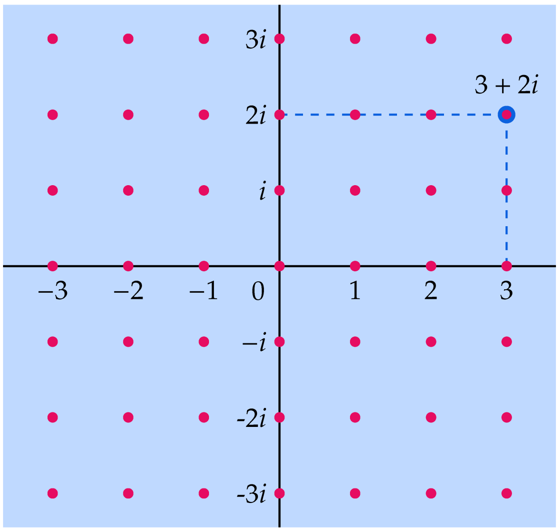
7.3 *De Julia verzameling*

Uitgangspunt is dezelfde iteratie, maar nu houden we c vast en geven we elk complex getal een kleur afhankelijk van het gedrag van de iteratie met die beginwaarde.

Hoofdstuk 8

De gehelen van Gauss

8.1 *Parallel tussen de gehele getallen en de gehelen van Gauss*
In deze paragraaf gaan we in op enkele parallellen tussen de gewone gehele getallen zoals $-21, -4, 3, 27$, en de zogenaamde *gehelen van Gauss*: complexe getallen van de vorm $a + bi$ met a en b geheel, zoals $-3 + 2i$, $5 - i$ enzovoort. We noteren de gehelen van Gauss met $\mathbb{Z}[i]$. De gehelen van



Figuur 8.1 De gehelen van Gauss vormen de 'roosterpunten' in het complexe vlak.

Gauss bevatten de gewone gehele getallen, want gehele getallen zijn van de vorm $a + i \cdot 0$ en voldoen dus aan de definitie van de gehelen van Gauss. Gauss (1777–1855) ontdekte dat deze grotere verzameling in een aantal opzichten lijkt op de verzameling 'gewone' gehele getallen.

- Zo kun je in beide verzamelingen delen met rest. Een voorbeeld binnen $\mathbb{Z}$: als je 11 deelt door 4 krijg je quotiënt 2 en rest 3. Een voorbeeld binnen $\mathbb{Z}[i]$ (verderop gaan we hier nader op in): als je 7 deelt door $1 + 2i$ krijg je quotiënt $1 - 3i$ en rest i.
- In beide verzamelingen kun je ontbinden in (priem)factoren. In $\mathbb{Z}$ ontbindt het getal 28 als volgt: $2 \cdot 2 \cdot 7$. In $\mathbb{Z}[i]$ blijkt 6 te ontbinden als $(1 + i) \cdot (1 - i) \cdot 3$.

Je moet wel goed weten in welke van de twee verzamelingen je aan het werken bent: zo kan het getal 5, dat niet ontbonden kan worden in $\mathbb{Z}$ (het is een zogenaamd priemgetal), weer wel verder ontbonden worden in $\mathbb{Z}[i]$: $5 = (1 + 2i) \cdot (1 - 2i)$.

De onderzoekingen van Gauss zijn later in allerlei richtingen uitgebreid. In dit gebied van de getaltheorie vindt actief onderzoek plaats, onder andere met het oog op toepassingen in de cryptologie, het vakgebied dat zich bezighoudt met manieren om digitale informatie te beveiligen.

8.1 Delen met rest

8.2 *De gehele getallen $\mathbb{Z}$: delen met rest*
De gehele getallen $\mathbb{Z}$ vormen een gesloten systeem onder optelling, aftrekking en vermenigvuldiging, maar zijn geen gesloten systeem onder deling. Deel je bijvoorbeeld 7 door 3, dan beland je buiten de gehele getallen (en delen door 0...). Als je 7 deelt door 3 blijft er een rest over: $7 = 2 \cdot 3 + 1$.

Een geheel getal a is een *deler* van het gehele getal b als er een geheel getal q bestaat met $b = qa$. Het getal b heet dan ook wel een *veelvoud* van a. Voorbeelden: 17 is een deler van 51 omdat $51 = 3 \cdot 17$, maar geen deler van 40 omdat uit $2 \cdot 17 < 40$ en $3 \cdot 17 > 40$ volgt dat er geen geheel getal q is met $40 = q \cdot 17$. Als het gehele getal a geen deler is van b dan kunnen we wel een zogenaamde *deling met rest* uitvoeren. Denk aan $40 = 2 \cdot 17 + 6$, waarbij we zeggen dat 40 bij deling door 17 rest 6 overlaat. In het algemeen zoeken we bij (de positieve getallen) b en a gehele getallen q (*quotiënt*) en r (*rest*) met de eigenschappen

a) $b = qa + r$ en

b) $0 \leq r < a$.

Misschien heb je geleerd dat je met behulp van een staartdeling of een variant daarop quotiënt en rest bij een deling kunt bepalen. Hier is een voorbeeld van een staartdeling waarmee je berekent dat 74 gedeeld door 3 quotiënt 24 en rest 2 oplevert.

$$\begin{array}{ccrl} 3 & / & 74 & \backslash 24 \\ & & \underline{6\ } & \\ & & 14 & \\ & & \underline{12} & \\ & & 2 & \end{array}$$

1 **Opgave** De gehelen van Gauss vormen een gesloten rekensysteem ten aanzien van drie van de volgende vier rekenkundige operaties: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Welke drie? Werk je antwoord uit.

8.3 *De gehelen van Gauss: delers en veelvouden*
Als u en v gehelen van Gauss zijn, dan heet u een *deler* van v als er een gehele van Gauss q bestaat met

$$v = q \cdot u.$$

We noemen v in dit geval ook wel een *veelvoud* van u en q het *quotiënt*. Zo is $1 + i$ een deler van 2 omdat $2 = (1 + i)(1 - i)$.

Als $u \neq 0$, dan kun je nagaan of u een deler is van v door te controleren of v/u een gehele van Gauss is.

8.4 **Voorbeeld** Om te onderzoeken of het getal $1 + i$ een deler is van $2 + i$ bekijken we het quotiënt

$$\frac{2+i}{1+i}.$$

Herschrijven levert

$$\frac{2+i}{1+i} = \frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}.$$

Hieraan zien we dat $1 + i$ geen deler is van $2 + i$.

2 **Opgave** a) Is $2 + i$ een deler van 3? En van 5?

b) Als u een deler is van v, dan is er een gehele van Gauss q met $v = q \cdot u$. Waarom is $\overline{u}$ een deler van $\overline{v}$?

c) Als u een deler is van v, dan is $u \cdot \overline{u}$ een deler van $v \cdot \overline{v}$. Waarom?

d) Als u een deler is van v en $v \neq 0$, dan is $|u| \leq |v|$. Waarom?

8.5 *De gehelen van Gauss: delen met rest*
Ook bij de gehelen van Gauss blijkt er zoiets als ‘deling met rest’ te bestaan. Natuurlijk ziet die er wat moeilijker uit, maar de onderliggende gedachte is in grote lijnen hetzelfde. Hier is een voorbeeld waarbij we het complexe getal 7 gedeeld hebben door het complexe getal $1 + 2i$:

$$7 = (1 + 2i)(1 - 3i) + i.$$

Het quotiënt blijkt in dit geval $1 - 3i$ te zijn en de rest bedraagt i. Als je het quotiënt $7/(1 + 2i)$ in de vorm $a + bi$ schrijft, kom je op het complexe getal $7/5 - (14/5)i$ uit en dat behoort niet tot de gehelen van Gauss. Maar $1 - 3i$ is een gehele van Gauss die wel dicht bij $7/5 - (14/5)i$ ligt. Daarom nemen we $1 - 3i$ als quotiënt. De rest, in ons geval i, zou dan ook klein moeten zijn. Een geschikte maat voor ‘klein’ is de absolute waarde.

3 **Opgave** Bij deling met rest in de verzameling der gehelen van Gauss gaat het om het zoeken van een ‘redelijk’ quotiënt en een zo ‘klein’ mogelijke rest. Aan de hand van de volgende opdrachten zie je hoe de gehelen van Gauss in het complexe vlak een rol kunnen spelen om deze begrippen een preciese betekenis te geven.

a) Als je de gehele van Gauss $\alpha = a+bi$ deelt door de gehele $\beta = c+di$, dan zijn het reële en het imaginaire deel van deze breuk beide rationale getallen (breuken van gehele getallen). Kun je dat inzien door het reële en het imaginaire deel te bepalen?

b) Bij deling van 35 door 16 is het gehele getal 2 het 'beste' quotiënt omdat het zo dicht bij 35/16 ligt. Welke gehele(n) van Gauss ligt (liggen) dicht bij $15/(3+4i)$? Noem dit getal het quotient q. Wat is de rest? Vergelijk de absolute waarde van de rest met die van q.

c) Nu algemeen: geef in een plaatje aan welke gehele van Gauss je als quotiënt neemt bij α/β. Noem dit getal q. en noem $\alpha - q\beta$ verder r. Laat met behulp van je plaatje zien dat geldt:

$$\alpha = q\beta + r \text{ met } |r| < |\beta|.$$

d) Analyseer de deling van $3+4i$ door $1-i$.

8.2 Priemgetallen en ontbinden in priemfactoren

8.6 *Priemgetallen en ontbinden in priemfactoren*

Priemgetallen zijn de bouwstenen van de gehele getallen als het om vermenigvuldigen gaat: elk (positief) geheel getal is te schrijven als product van priemgetallen.

Een *priemgetal* is een geheel getal dat groter is dan 1 en alleen 1 en zichzelf als positieve delers heeft. De vijf eerste priemgetallen zijn 2, 3, 5, 7 en 11.

Een eenvoudig voorbeeld van zo'n *factorisatie* in priemfactoren is:

$$165 = 3 \cdot 5 \cdot 11,$$

waarbij 165 is geschreven als het product van de priemgetallen 3, 5 en 11. Het vinden van priemfactoren van grote getallen (zeg van enkele honderden cijfers) is met de huidige inzichten en computers vooralsnog een onmogelijk karwei. Dit feit is handig verwerkt in het zogenaamde RSA-cryptosysteem (genoemd naar Rivest, Shamir en Adleman). Hierbij wordt dataverkeer (denk aan pinpasjes) op zo'n manier versleuteld, dat inbreken alleen kan als je een of ander groot getal weet te factoriseren.

4 Opgave a) Welke van de volgende getallen is een priemgetal: 17, 21, 29, 77, 163?

b) Ontbind de volgende getallen in priemfactoren: 32, 54, 207.

5 **Opgave** Ga na dat je het begrip 'priemgetal' ook zo kunt beschrijven: een positief geheel getal p dat groter is dan 1 en de eigenschap heeft dat elke deler gelijk is aan ± 1 of gelijk is aan $\pm p$. (De getallen 1 en -1 heten wel de *eenheden* van de gehele getallen.)

6 **Opgave** Laat zien dat elk positief geheel getal (> 1) te schrijven is als product van priemgetallen (we spreken af dat een geheel getal dat een priemgetal is, te schrijven is als het product van dit ene priemgetal), bijvoorbeeld aan de hand van de volgende onderdelen.

a) Laat $n > 1$ een positief geheel getal zijn. Er zijn twee gevallen: n is zelf een priemgetal of n is geen priemgetal. In het eerste geval ben je natuurlijk klaar. Wat kun je opmerken in het tweede geval?

b) Zet deze redenering voort.

c) Hier is een andere gedachtegang. Veronderstel dat er positieve gehele getallen > 1 zijn die niet te schrijven zijn als product van priemgetallen. Laat m de kleinste van deze getallen zijn. Waarom is m dan een priemgetal? Waarom is onze veronderstelling dus fout geweest? Conclusie.

Hieronder formuleren we de volledige stelling; de uniciteit van de ontbinding hebben we niet bewezen (en dat zullen we hier achterwege laten). We spreken af dat het getal 1 te schrijven is als het product van nul priemgetallen. (Deze afspraak zorgt ervoor dat we minder vaak uitzonderingsgevallen hoeven te bekijken.)

8.7 **Stelling** Elk positief geheel getal n is te schrijven als product van priemgetallen. Dat wil zeggen, er zijn verschillende priemgetallen $p_1, \dots, p_k$ en (positief gehele) exponenten $m_1, \dots, m_k$ zodat

$$n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}.$$

Bovendien is er voor elk getal n maar één ontbinding mogelijk (de ontbinding is *uniek*).

8.8 **Opmerking** Met de uniciteit van de ontbinding bedoelen we, precies gezegd, het volgende. Laten we zeggen dat we n hebben geschreven als

$$n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$$

en dat $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$. Als

$$n = q_1^{m_1} q_2^{m_2} \cdots q_\ell^{m_\ell}$$

met priemgetallen $q_1 < q_2 < \cdots < q_\ell$ en exponenten $r_1, \dots, r_\ell$ ook een ontbinding in priemfactoren is van n, dan is $k = \ell$, $p_1 = q_1, \dots, p_k = q_k$ en $m_1 = r_1, \dots, m_k = r_k$.

7 Opgave Als je op zoek bent naar priemdelers van n, waarom hoef je dan alleen maar priemgetallen te testen die hooguit gelijk zijn aan $\sqrt{n}$?

8.3 Ontbinden in de gehelen van Gauss

8.9 *Delers en veelvouden in de gehelen van Gauss*
Bij de gehelen van Gauss zijn we de begrippen deler en veelvoud al tegengekomen. Het is een natuurlijke vraag te onderzoeken of er in deze getallenwereld ook een begrip 'priemgetal' is en zoiets als een ontbinding in priemfactoren. We herhalen nog even de definitie. Een getal $a + bi$ uit $\mathbf{Z}[i]$ ($\neq 0$ verondersteld) heet een *deler* van $c + di$ uit $\mathbf{Z}[i]$ als het quotiënt $(c + di)/(a + bi)$ zelf weer een gehele van Gauss is. Het getal $1 + i$ is bijvoorbeeld een deler van 4 omdat het quotiënt gelijk is aan $2 - 2i$ (reken maar na!) en dat is zelf een gehele van Gauss.

De getallen $1, -1, i, -i$ heten de *eenheden* van $\mathbf{Z}[i]$. Het zijn de enige gehelen van Gauss die absolute waarde gelijk aan 1 hebben; het zijn in die zin de kleinste gehelen van Gauss ongelijk 0 (zie de volgende opgave).

8 Opgave a) Als $a + bi$ in $\mathbf{Z}[i]$ zit en absolute waarde 1 heeft, laat dan zien dat $a + bi$ een eenheid moet zijn. Analyseer hiertoe de vergelijking $1 = a^2 + b^2$ (let op: a en b moeten geheel zijn!).

b) Controleer dat geldt: als u een eenheid is, dan is $1/u$ ook een eenheid.

c) Laat zien dat de eenheden een gesloten rekensysteem vormen ten aanzien van vermenigvuldigen.

9 Opgave *De norm van een complex getal*
De absolute waarde $|z|$ van een complex getal $z = a + bi$ is $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. De absolute waarde speelt een rol bij deling met rest, maar is ook handig als we het over delers hebben. De reden daarvoor is dat de absolute waarde zich 'mooi' gedraagt ten aanzien van vermenigvuldigen:

$$|zw| = |z| \cdot |w| \text{ voor alle } z \text{ en } w.$$

Jammer is wel dat de absolute waarde van een gehele van Gauss niet per se zelf een geheel getal is: $|1 + i| = \sqrt{2}$ en $\sqrt{2}$ is geen geheel getal. Daarom werken we in de getaltheorie liever met het kwadraat van de absolute waarde, de zogenaamde *norm van een complex getal*. De *norm* $N(z)$ van het complexe getal $z = a + bi$ is

$$N(z) := a^2 + b^2.$$

Anders gezegd: $N(z) = |z|^2$, het kwadraat van de absolute waarde van z. Als $a + bi$ een gehele van Gauss is, dan is $N(a + bi) = a^2 + b^2$ dus een geheel getal.

a) Bereken de norm van $3+2i$ en $4-i$.

b) Leid af dat voor alle complexe getallen z en w geldt:

$$N(zw) = N(z) \cdot N(w).$$

De norm gedraagt zich dus ook 'mooi' ten aanzien van vermenigvuldigen. Het nut hiervan blijkt verderop.

c) Als w een deler is van z, waarom is $N(w)$ dan een deler van $N(z)$?

d) Als z een gehele van Gauss is en $N(z)$ een priemgetal is, wat kun je dan zeggen van de norm van een deler van z?

8.10 *Irreducibele gehelen van Gauss, de tegenhangers van priemgetallen*
Een gehele van Gauss α heet *irreducibel* als het geen eenheid is en als elke deler van α een eenheid is, of het product van α en een eenheid (dat wil zeggen $u\alpha$ waarbij u een eenheid is).

In het bijzonder heeft elke deler van α dan absolute waarde 1 of $|\alpha|$ (bedenk dat de absolute waarde van $u\alpha$ gelijk is aan $|u| \cdot |\alpha| = |\alpha|$). Irreducibele gehelen van Gauss vervullen een rol binnen de gehelen van Gauss die vergelijkbaar is met de rol van priemgetallen binnen de gehele getallen.

8.11 **Voorbeeld** Het getal 2 is niet irreducibel in $\mathbf{Z}[i]$, want:

- $2 = (1+i)(1-i)$, dus bijvoorbeeld $1+i$ is een deler.
- Nu is $1 < |1+i| = \sqrt{2} < 2$, dus de absolute waarde van $1+i$ is noch 1 noch gelijk aan de absolute waarde van 2.

Dit voorbeeld laat zien dat de absolute waarde van nut is bij het bestuderen van het begrip 'priem' bij de gehelen van Gauss.

10 **Opgave** *Als $N(z)$ een priemgetal is, dan is z irreducibel*
Met behulp van de norm N ontstaan verbanden tussen eigenschappen van de gehelen van Gauss en de gehele getallen.

a) Veronderstel dat z een gehele van Gauss is met de eigenschap dat $N(z)$ priem is. Laat u en v delers zijn van z met $uv = z$. Laat met behulp van deze gelijkheid en de norm zien dat z irreducibel is. Het getal $1+i$ is op grond van dit argument irreducibel, want $N(1+i) = |1+i|^2 = 2$ en dat is een priemgetal. Kun je meer voorbeelden bedenken?

b) Verzin een irreducibel getal waarvan de norm niet priem is.

11 **Opgave** *Ontbinding in irreducibele factoren in $\mathbb{Z}[i]$*
Veronderstel dat $\alpha \neq 0$ een gehele van Gauss is die geen eenheid is.

In deze opgave tonen we aan dat α te schrijven is als product van irreducibele factoren. Een voorbeeld van zo'n factorisatie is

$$8 + 19i = (2 + i)^2(4 + i).$$

a) Waarom zijn $2 + i$ en $4 + i$ irreducibel?

b) Terug naar de factorisatie van α. Er zijn twee gevallen: α is irreducibel of α heeft een deler waarvan de absolute waarde kleiner is dan $|\alpha|$, maar wel groter is dan 1. Toon aan!

c) Hoe zou je in dit tweede geval verder gaan? Voltooi het bewijs.

Net als in $\mathbb{Z}$ blijkt factorisatie in $\mathbb{Z}[i]$ weer uniek te zijn. Daarbij moet je wel bedenken dat we twee irreducibele factoren die een factor 1, -1, i of $-i$ (een eenheid) schelen niet als wezenlijk verschillend beschouwen, ook al zien ze er misschien behoorlijk verschillend uit, zoals $2 + i$ en $2i - 1$ (hier is $2i - 1 = i(2 + i)$).

12 **Opgave** Als je de delers van een gehele van Gauss z zoekt, zou je domweg 'alle' gehelen van Gauss w kunnen nalopen met $N(w) \leq N(z)$. Waarom kun je volstaan met te zoeken naar delers w met $N(w) \leq \sqrt{N(z)}$?

13 **Opgave** Het getal 13 is te schrijven als som van twee kwadraten van gehele getallen: $13 = 2^2 + 3^2$. Ook 17 is de som van twee kwadraten: $17 = 1^1 + 4^2$. Gebruik de norm van complexe getallen om te laten zien dat $13 \cdot 17$ ook te schrijven is als som van twee kwadraten.

8.4 Opdracht bij hoofdstuk 8

Maak een poster waarop je duidelijk maakt wat een priemgetal is (bij de gewone gehele getallen) en wat een irreducibel getal is bij de gehelen van Gauss. Probeer waar mogelijk een en ander te visualiseren! Hier zijn enkele items die je kunt opnemen:

- Geef een definitie en geef voorbeelden van priemgetallen. Noem bijvoorbeeld de priemfactorontbinding (een klassiek resultaat over priemgetallen).
- Geef aan wat een gehele van Gauss is, wat een eenheid is en wat een irreducibel getal. Geef voorbeelden!
- Hoe zou je de ontbinding van $8+19i$ aanpakken? [Hint: $N(8+19i)$.]
- Geef voorbeelden van ontbindingen van gehelen van Gauss in irreducibele factoren.

Hoofdstuk 9

Quaternionen

Toen men eenmaal goed begrepen had dat de constructie van de complexe getallen een mensenzaak is, rees de vraag of men ook de complexe getallen weer op vergelijkbare wijze kan uitbreiden. Het antwoord luidt 'ja' en de beroemdste uitbreiding betreft de verzameling van *quaternionen*, ontdekt door de Ier Sir William Hamilton (1805–1865) in de 19e eeuw. De zoektocht naar getalsystemen is sinds die tijd in allerlei richtingen met veel succes voortgezet.

9.1 Om de quaternionen te beschrijven, hebben we naast het symbool i nog de twee symbolen j en k nodig (jammer, maar met slechts één extra symbool blijkt het niet te lukken om een consistent rekensysteem op te zetten). Een *quaternion* is een uitdrukking van de vorm $a + bi + cj + dk$ waarin a, b, c en d reële getallen zijn. Met deze uitdrukkingen reken je als met letters, maar met de extra regels:

$$i^2 = -1,\ j^2 = -1,\ k^2 = -1,\ ij = k,\ jk = i,\ ki = j,\ ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j.$$

Dus $i(1 + j)$ kun je uitwerken tot $i + ij = i + k$. Het is vooral oppassen met het feit dat $ij \neq ji$, $ik \neq ki$ en $jk \neq kj$. Dat betekent dat bij het rekenen de volgorde van de factoren bij een vermenigvuldiging er toe doet! Kijk maar:

$$(1 + i)(1 + j) = 1 + i + j + ij,$$

terwijl

$$(1 + j)(1 + i) = 1 + i + j + ji.$$

Omdat $ij \neq ji$ hebben we dus verschillende antwoorden gekregen. Rekensystemen waarin de volgorde van de factoren van belang is bij het vermenigvuldigen, wekten destijds de nodige verbazing. Later ontdekte men dat zulke systemen juist vaak voorkomen.

1 Opgave Bepaal $(2 + i + j)(3 - i - k)$ en $(3 - i - k)(2 + i + j)$.

2 Opgave Uit de rekenregels volgt dat $(c + di)j = cj + dk$. Een quaternion $a + bi + cj + dk$ is dus ook te schrijven als

$$a + bi + (c + di)j.$$

Je zou een quaternion dus ook kunnen definëren als een uitdrukking van de vorm $w + zj$ waarin w en z complexe getallen zijn en waarin j een nieuw symbool is dat aan de regels $j^2 = -1$ en $ij = -ji$ voldoet. Hoe zou je in deze termen de optelling en de vermenigvuldiging van twee quaternionen definiëren?

Hoofdstuk 10

Voorkennis

Om deze module met succes te kunnen doorwerken, dien je met de volgende begrippen en onderwerpen vertrouwd te zijn.

- Rekenen met getallen, rekenen met letters.
- Rekenen met bijzondere uitdrukkingen, zoals $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$.
- *Goniometrie:*
  Rekenregels voor de cosinus en de sinus, zoals (voor reële a en b):

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$
$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1.$$

  Bijzondere waarden van de sinus en cosinus:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

- *Binomium van Newton:*

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + b^n,$$

  waarin

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Speciale gevallen:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{en} \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

- *Kwadraat afsplitsen*:
  De uitdrukking $x^2 + bx + c$ bevat zowel een kwadratische als een lineaire term in x. Deze twee termen kun je binnen één kwadraat onderbrengen:

$$x^2 + bx + c = (x + \frac{b}{2})^2 + c - \frac{b^2}{4}\,.$$

Bibliografie

[1] Het portret van Sir William Rowan Hamilton is afkomstig van de site http://wordassociation1.net/. De portret van Carl Friedrich Gauss is afkomstig van de site http://www.mathunion.org/.

[2] De fractals zijn met het computeralgebrapakket Mathematica gemaakt. De overige wiskundige plaatjes zijn met PSTricks gemaakt. Voor de tekst is de tekstverwerker LaTeX gebruikt.

Index